

## จำนวนข้อที่ออกสอบ PAT 1 ( 6 ครั้งล่าสุด )

เนื้อหา PAT 1 ทั้งหมด	พ.ย. 57	มี.ค. 58	ต.ค. 58	มี.ค. 59	ต.ค.59	มี.ค.60
1. เซต	1	2	2	2	2	2
2. จำนวนจริง	1	3	2	1	2	1
3. ตรรกศาสตร์	3	2	2	2	2	2
4. เรขาคณิตวิเคราะห์	3	3	3	3	2	3
5. ความสัมพันธ์+ฟังก์ชัน*	1	2	3	3	4	3
6. ตรีโกณมิติ*	5	5	4	4	4	4
7. เอกซ์โพ+ลอการิธึม*	5	4	4	6	4	6
8. เมตริกซ์	2	2	2	2	2	2
9. เวกเตอร์	1	1	2	2	2	2
10. จำนวนเชิงซ้อน	2	2	1	1	1	1
11. ลำดับและอนุกรม	3	3	3	3	4	3
12. แคลคูลัส*	5	5	5	5	6	4
13. ความน่าจะเป็น	3	3	4	2	2	2
14. สถิติ*	5	5	5	5	5	6
15. กำหนดการเชิงเส้น	1	1	1	1	2	1
16. เซาว์ปัญหา	4	2	2	3	1	3
คะแนนเฉลี่ย ( เต็ม 300 )	51.56	55.34	52.61	46.03	42.82	50.23

ข้อสอบมีทั้งหมด 45 ข้อ ให้เวลา 3 ชม.

30 ข้อแรกปรนัย 5 ตัวเลือก ข้อละ 6 คะแนน , 15 ข้อหลัง อัตนัย ข้อละ 8 คะแนน

## 5 ข้อ PAT1 ที่ออกซ้ำๆ 100 % !!!

ครั้งที่	เดือน / ปี ที่สอบ	ค่า Z และ การแจกแจง ปกติ	คสพ.เชิง ฟังก์ชัน ระหว่าง ข้อมูล	กำหนด การเชิงเส้น	การหา จำนวน สมาชิกเซต	ลิมิต และ ความต่อเนื่อง
1.	มี.ค / 52	2	1	1	0	0
2.	ก.ค / 52	1	1	1	1	0
3.	ต.ค / 52	2	1	1	1	0
4.	มี.ค / 53	1	0	0	1	1
5.	ก.ค / 53	1	0	0	1	1
6.	ต.ค / 53	0	0	0	1	1
7.	มี.ค / 54	2	1	1	1	2
8.	ต.ค / 54	1	0	1	1	1
9.	มี.ค / 55	1	0	1	1	1
10.	ต.ค / 55	2	1	1	2	1
11.	มี.ค / 56	1	1	1	0	1
12.	ธ.ค / 56	1	1	1	1	1
13.	เม.ย / 57	1	1	1	1	1
14.	พ.ย / 57	1	1	1	1	0
15.	มี.ค / 58	1	1	1	2	2
16.	ต.ค / 58	1	1	1	2	2
17.	มี.ค / 59	1	1	1	1	2
18.	ต.ค / 59	1	1	2	1	1
19.	มี.ค / 60	2	1	1	2	2

ตารางแสดงจำนวนคำตอบของข้อสอบ PAT 1 ส่วนเติมคำ ( อัตนัย )

ครั้งที่	เดือน / ปี ที่สอบ	ตอบ 1	ตอบ 2	ตอบ 3	ตอบ 4	ตอบ 5	ตอบ 6	ตอบ 7	ตอบ 8
3.	ต.ค / 52	-	2 ข้อ	-	3 ข้อ	-	2 ข้อ	-	2 ข้อ
4.	มี.ค / 53	-	1 ข้อ	-	-	-	3 ข้อ	3 ข้อ	-
5.	ก.ค / 53	-	6 ข้อ	2 ข้อ	2 ข้อ	-	-	-	-
6.	ต.ค / 53	3 ข้อ	2 ข้อ	1 ข้อ	1 ข้อ	-	-	-	-
7.	มี.ค / 54	-	1 ข้อ	2 ข้อ	3 ข้อ	-	-	-	2 ข้อ
8.	ต.ค / 54	-	2 ข้อ	1 ข้อ	2 ข้อ	2 ข้อ	1 ข้อ	-	-
9.	มี.ค / 55	2 ข้อ	-	-	1 ข้อ	1 ข้อ	3 ข้อ	-	-
10.	ต.ค / 55	-	2 ข้อ	2 ข้อ	-	-	2 ข้อ	-	-
11.	มี.ค / 56	-	2 ข้อ	1 ข้อ	2 ข้อ	-	-	-	-
12.	ธ.ค / 56	-	1 ข้อ	2 ข้อ	1 ข้อ	-	-	-	-
13.	เม.ย / 57	-	-	1 ข้อ	-	1 ข้อ	-	-	-
14.	พ.ย / 57	-	-	1 ข้อ	1 ข้อ	-	-	-	-
15.	มี.ค / 58	-	-	-	1 ข้อ	-	-	-	-
16.	ต.ค / 58	-	-	-	1 ข้อ	-	-	-	-
17.	มี.ค / 59	-	-	3 ข้อ	-	1 ข้อ	-	-	-
18.	ต.ค / 59	-	-	1 ข้อ	3 ข้อ	-	-	-	-
19.	มี.ค / 60	-	-	-	2 ข้อ	-	-	-	-
รวม		5	19	17	23	5	11	3	4

กลยุทธ์การสอบ PAT 1 ให้ได้ 100 คะแนน UP

- 1) ต้องรู้ว่าสอบกี่บท บทอะไรบ้าง บทไหนออกเยอะออกน้อย
- 2) ข้อสอบมีกี่ข้อ กี่ตอน ข้อละกี่คะแนน
- 3) คณะที่เราต้องการ คะแนน PAT1 ต้องเท่าไรถึงติด
- 4) หัวข้อไหนออกบ่อยสุด และเก็บคะแนนไม่ยาก
- 5) สถิติปีละประมาณ 5 ข้อ ไม่ยาก ต้องได้อย่างน้อย 4 ข้อ !!
  - ข้อที่ 1. ค่ากลางข้อมูล ( ค่าเฉลี่ยเลขคณิต , มัธยฐาน , ฐานนิยม )
  - ข้อที่ 2. การวัดตำแหน่งข้อมูล
  - ข้อที่ 3. การวัดการกระจายข้อมูล
  - ข้อที่ 4. ค่ามาตรฐานและการแจกแจงปกติ
  - ข้อที่ 5. ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล
- 6) ถ้านักเรียนอ่านไม่ทัน พื้นฐานอ่อน แนะนำเท(ทิ้ง) บทที่ยากหรือไม่ชอบ เช่น ตรีโกณมิติ , ลำดับและอนุกรม , จำนวนเชิงซ้อน , เวกเตอร์ , ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน , ฯลฯ ฝึกโจทย์บทที่เราเข้าใจให้ทำได้จริงๆ  
( ข้อสอบ PAT 1 เก่าๆสำคัญมาก )

## ข้อที่ 1. ค่ามาตรฐาน และ พื้นที่ใต้โค้งปกติ

## → ค่ามาตรฐาน ( Standard score , Z score )

คือ ค่าที่ใช้เปรียบเทียบคะแนนดิบจากข้อมูลตั้งแต่ 2 กลุ่มขึ้นไปว่าคะแนนดิบตัวใดมีค่ามากกว่า

เมื่อ  $x_i$  คือ คะแนนดิบตัวที่  $i$

$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

$\mu$  คือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของประชากร

$\sigma$  คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร

หรือ

$$Z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$$

$\bar{x}$  คือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของกลุ่มตัวอย่าง

$S$  คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง

## → สมบัติค่ามาตรฐานที่ควรทราบ

(1)  $\sum Z = 0$  ผลรวมค่ามาตรฐานของคะแนนดิบทุกตัวจะเท่ากับศูนย์เสมอ

(2)  $\sum Z^2 = N$  ผลรวมกำลังสองค่ามาตรฐานของคะแนนดิบทุกตัวจะเท่ากับจำนวนข้อมูลเสมอ

(3)  $\sigma_z = 1$  ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่ามาตรฐานเท่ากับ 1 เสมอ

Ex1. น้องพลอยู่โรงเรียนประจำจังหวัด , น้องแนนอยู่โรงเรียนประจำอำเภอ , น้องเหม่งอยู่โรงเรียนประจำตำบล และ น้องเอ็กซ์อยู่โรงเรียนประจำหมู่บ้าน เป็นนักเรียนชั้น ม.6 ซึ่งมีผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ พร้อมกับค่าเฉลี่ยเลขคณิต ( $\mu$ ) และ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ( $\sigma$ ) เป็นดังนี้ จงพิจารณาว่าใครเก่งกว่ากัน

คะแนน น้องพล ( $x_i$ )	85
$\mu$	79
$\sigma$	8

คะแนน น้องแนน ( $x_i$ )	36
$\mu$	30
$\sigma$	5

คะแนน น้องเหม่ง ( $x_i$ )	92
$\mu$	94
$\sigma$	2

คะแนน น้องเอ็กซ์ ( $x_i$ )	35
$\mu$	40
$\sigma$	10

Ex2. ในการสอบครั้งหนึ่ง P'1 สอบได้ 55 คะแนน คิดเป็นคะแนนมาตรฐานได้เท่ากับ 0.5 ถ้าสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนห้องนี้มีค่า 20% จงหาคะแนนเฉลี่ยของคะแนนนักเรียนห้องนี้

1. 55
2. 50
3. 45
4. ข้อมูลไม่เพียงพอ

Ex3. ในค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนห้องหนึ่งเท่ากับ 538 คะแนน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 83.2 คะแนน ถ้านาย ก. และ นาย ข. ได้คะแนนมาตรฐานต่างกัน 0.7 แล้วคะแนนสอบนาย ก. และ นาย ข. จะต่างกันเท่าใด

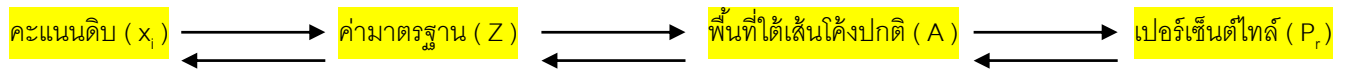
1. 58.42
2. 59.84
3. 58.24
4. 58.94

Ex4. ผลการสอบของนักเรียนวิชาคณิตศาสตร์จำนวน 20 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเท่ากับ 60 , ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 ถ้าผลรวมของค่ามาตรฐานของคะแนนของนักเรียนกลุ่มนี้เพียง 19 คน เท่ากับ 2.5 แล้วนักเรียนอีก 1 คนที่เหลือจะสอบได้คะแนนเท่าใด

1. 35
2. 37.5
3. 62.5
4. 85

Ex5. ข้อมูลชุดหนึ่งมีผลรวมของค่าทุกค่าในข้อมูลเท่ากับ 120 และผลรวมของกำลังสองของค่ามาตรฐานทุกค่าในข้อมูลเท่ากับ 5 จงหาค่าเฉลี่ยของข้อมูลชุดนี้

→ การแจกแจงปกติ และ เส้นโค้งปกติ เป็นเรื่องที่จะสามารถโยงความสัมพันธ์ระหว่าง



→ สิ่งที่น่าสนใจๆ ควบคู่เกี่ยวกับพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ

(1) ส่วนประกอบของพื้นที่ใต้เส้นโค้ง

(2) พื้นที่จากตารางวัดจากแกนกลางเสมอ

(3) พื้นที่ 2 ฝั่งสมมาตรกัน

→ ตัวอย่างความสัมพันธ์ระหว่างค่า  $Z$  กับ ค่าเปอร์เซ็นต์ไทล์

(1) เมื่อ  $Z$  เป็น +

(2) เมื่อ  $Z$  เป็น -



Ex1. ผลการสอบของผู้สมัครเข้าทำงานในบริษัทแห่งหนึ่ง 1,000 คน มีการแจกแจงปกติ ได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 42 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 3 ถ้าบริษัทต้องการรับเฉพาะผู้ที่สอบได้ตั้งแต่ 48 คะแนนขึ้นไป จะมีผู้ที่ได้รับเลือกเข้าทำงานในบริษัทนี้กี่คน ( กำหนดที่  $z = 1$  ได้  $A = 0.3413$  และที่  $z = 2$  ได้  $A = 0.4773$  )

Ex2. ในการทดสอบคณิตศาสตร์ ปรากฏคะแนนจากการสอบนี้แจกแจงได้เป็นรูปโค้งปกติโดยมีผู้เข้าสอบทั้งสิ้น 1,000 คน มีคะแนนเฉลี่ยได้ 72 คะแนนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 คะแนน จงหาว่าผู้สอบได้คะแนนอย่างยอดเยี่ยมตรง  $P_{86}$  จะคิดเป็นคะแนนดิบที่ประมาณเท่าไร ( กำหนด  $z = 1.08$  ตรงกับพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ 0.3608 ) ( ตอบ 4 )

1. 80                                      2. 81                                      3. 82                                      4. 83

Ex3. ในการสอบวิชาหนึ่งมีคะแนนเต็ม 20 คะแนน โดยการแจกแจงเป็นรูปโค้งปกติมีค่ามัธยฐานเท่ากับ 14 คะแนน ถ้ามีคนสอบได้คะแนนต่ำกว่า 11.88 คะแนน อยู่ 11.51% จงหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบครั้งนี้ เมื่อกำหนด  $Z = 1.2$  ได้  $A = 0.3849$  ( ตอบ 3 )

1. 1.56                                      2. 1.64                                      3. 1.77                                      4. 1.84

Ex4. ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนแห่งหนึ่ง ปรากฏว่ามีการแจกแจงความถี่แบบปกติ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบเท่ากับ 45 และสัมประสิทธิ์การแปรผันเท่ากับ 20 %

ถ้านางสาวแดงซึ่งเป็นนักเรียนในห้องนี้สอบได้คะแนนในตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 88 จงคำนวณหาคะแนนสอบนางสาวแดง (คิดเป็นคะแนนเลขเต็มหน่วย) โดยกำหนด (ตอบ 2)

Z	1.170	1.175	1.180	1.200
A	0.3790	0.3800	0.3810	0.3849

1. 46 คะแนน      2. 56 คะแนน      3. 66 คะแนน      4. 71 คะแนน

Ex5. ข้อมูลชุดหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยที่ค่าสูงสุดของข้อมูลมีค่าเท่ากับค่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 97.5 และ ค่าต่ำสุดของข้อมูลมีค่าเท่ากับค่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 33 ถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลเท่ากับ 10 แล้ว พิสัยของข้อมูลชุดนี้เท่ากับเท่าใด กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งดังนี้ (ตอบ 24)

Z	.44	1.96
A	.17	.475

- Ex6. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ และ ฟิสิกส์ ของนักเรียนห้องหนึ่ง มีผลดังนี้
- วิชาคณิตศาสตร์ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 60 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 10 คะแนน
- วิชาฟิสิกส์ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 64 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 8 คะแนน
- สมมติว่าคะแนนของวิชาทั้งสองมีการแจกแจงปกติ โดยที่ นาย ก. สอบคณิตศาสตร์ได้ 45 คะแนน คิดเป็นเดโวลที่ 2 ของวิชาคณิตศาสตร์ ถ้า นาย ก. สอบวิชาฟิสิกส์ได้ 76 คะแนน จะคิดเป็นเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่เท่าใดของวิชาฟิสิกส์ (ตอบ 4)
1.  $P_{20}$
  2.  $P_{40}$
  3.  $P_{60}$
  4.  $P_{80}$

● ข้อสอบ PAT1 ( 5 ครั้งล่าสุด ) ออกทุกครึ่ง !!!

1. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง มีการแจกแจงปกติ โดยมีค่ามัธยฐานเท่ากับ 60 คะแนน ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 55.5 คะแนน มีอยู่ร้อยละ 18.41 แล้ว นักเรียนที่สอบได้คะแนนสูงกว่า 64 คะแนน มีจำนวนคิดเป็นร้อยละเท่ากับข้อใดต่อไปนี ( ครึ่งที่ 15 มี.ค. 58 ) ( ตอบ 1 )

เมื่อกำหนดพื้นที่เส้นโค้งปกติ ระหว่าง 0 ถึง Z ดังนี้

Z	0.7	0.8	0.9	1.0
พื้นที่	0.2580	0.2881	0.3159	0.3413

1. 21.19                      2. 24.20                      3. 25.80                      4. 28.81

2. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนสอบวิชานี้เท่ากับ 25 % และมีนักเรียนร้อยละ 15.87 ที่สอบได้คะแนนมากกว่า 85 คะแนน ถ้านาย ก เป็นนักเรียนคนหนึ่งในห้องนี้ สอบได้ 47.6 คะแนน จะอยู่ในตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ตรงกับข้อใดต่อไปนี ( ครึ่งที่ 16 ต.ค. 58 ) ( ตอบ 4 )

เมื่อกำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ ระหว่าง 0 ถึง Z ดังนี้

Z	0.4	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
พื้นที่	0.1554	0.3159	0.3413	0.3643	0.3849	0.4032

1. 34.46  
2. 18.41  
3. 13.57  
4. 11.51  
5. 9.68

3. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง จำนวน 30 คน มีการแจกแจงปกติ และมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 64 คะแนน นักเรียนชายห้องนี้มี 18 คน คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชายห้องนี้มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 64 คะแนน และ ความแปรปรวนเท่ากับ 10 ส่วนคะแนนสอบของนักเรียนหญิงมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 5 คะแนน ถ้านางสาว ก. เป็นนักเรียนคนหนึ่งในห้องนี้ สอบได้คะแนนตรงกับเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 22.66 ของนักเรียนทั้งห้อง แล้ว คะแนนสอบของนางสาว ก. เท่ากับเท่าใด (ครั้งที่ 17 มี.ค. 59) (ตอบ 61)

เมื่อกำหนดพื้นที่เส้นโค้งปกติ ระหว่าง 0 ถึง  $z$  ดังนี้

Z	0.5	0.6	0.75	1.0	1.25
พื้นที่	0.1915	0.2257	0.2734	0.3413	0.3944

4. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง คะแนนสอบมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ  $a$  และ  $b$  คะแนน ตามลำดับ นาย ก. และ นาย ข. เป็นนักเรียนในห้องนี้ นาย ก. สอบวิชาคณิตศาสตร์ครั้งนี้ได้คะแนน 68 คะแนน คิดเป็นค่ามาตรฐานเท่ากับ 1.5 ถ้าครูผู้สอนวิชานี้ปรับคะแนนใหม่ โดยเพิ่มคะแนนของนักเรียนทุกคนเป็นสองเท่าของคะแนนเดิม คะแนนใหม่ของนาย ข. มากกว่าคะแนนใหม่ของนาย ก. อยู่ 6 คะแนน และ คะแนนใหม่ของนาย ข. คิดเป็นค่ามาตรฐานเท่ากับ 1.9 แล้ว ค่าของ  $a + b$  เท่ากับเท่าใด (ครั้งที่ 18. ต.ค. 59) (ตอบ 64.25)

5. ถ้าคะแนนสอบวิชาหนึ่งของนักเรียนจำนวน 80 คน มีการแจกแจงปกติ และมีสัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ  $\frac{1}{3}$  มีนักเรียนคนหนึ่งในห้องนี้สอบได้คะแนน 39 คะแนน คิดเป็นค่ามาตรฐานเท่ากับ 1.5 และมีนักเรียนจำนวน 60 คน ที่มีคะแนนสอบมากกว่า 15 คะแนน แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบเท่ากับข้อใดต่อไปนี (ครั้งที่ 19. มี.ค. 60) (ตอบ 4)
1. 9.5 คะแนน
  2. 10 คะแนน
  3. 10.5 คะแนน
  4. 11 คะแนน
  5. 11.5 คะแนน

6. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงปกติ ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 74 คะแนน มีจำนวนคิดเป็นร้อยละ 97.73 และนักเรียนที่สอบได้คะแนน 53 คะแนน จะตรงกับเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 6.68 แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มนี้เท่ากับเท่าใด (ครั้งที่ 19. มี.ค. 60) (ตอบ 62)

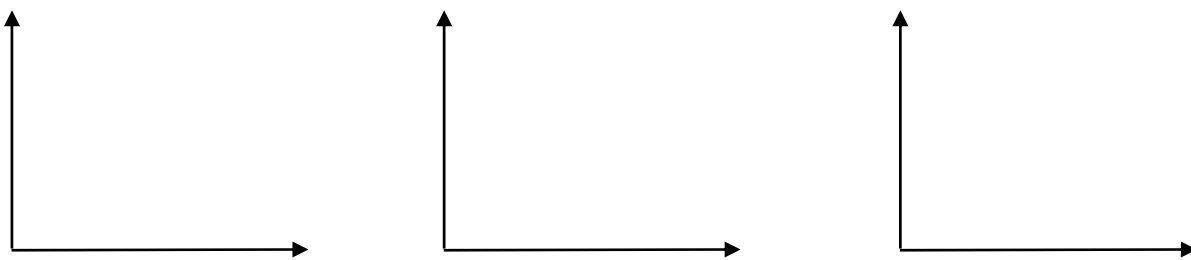
กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานระหว่าง 0 ถึง z ดังนี้

Z	0.5	1	1.5	2	2.5
A	0.1915	0.3413	0.4332	0.4773	0.4938

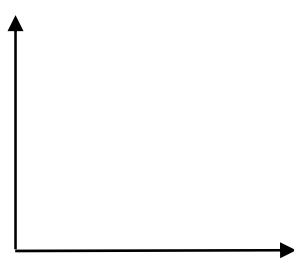
**ข้อที่ 2. ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล**

→ **การวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล**  
 คือ การพยากรณ์ค่าตัวแปรตาม ( Dependent variable ) เมื่อทราบค่าตัวแปรต้น ( ตัวแปรอิสระ , Independent variable )  
 “ ตัวแปรต้น ( ตัวแปรอิสระ ) เป็นตัวกำหนดค่าตัวแปรตาม ”  
 เช่น “ แม่จะซื้อ Honda Jazz ให้ถ้าฉัน Ent ติดอันดับหนึ่ง ” ตัวแปรต้น → อันดับหนึ่ง , ตัวแปรตาม → Honda Jazz

→ **แผนภาพการกระจาย ( Scatter Diagram )**  
 คือ แผนภาพจุดที่ใช้แสดงถึงแนวโน้มความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม กับ ตัวแปรต้น ( ตัวแปรอิสระ ) ว่าสัมพันธ์กันในลักษณะใด โดยในระดับชั้น ม.ปลาย จะแบ่งเป็น 3 แบบ คือ  
 (1) เส้นตรง (2) พาราโบลา (3) exponential



→ **ความสัมพันธ์ที่มีแนวโน้มเป็นกราฟเส้นตรง**



รูปสมการทั่วไป :  $Y = mX + c$   
 สมการปกติ :  $\sum_{i=1}^n y_i = m \sum_{i=1}^n x_i + cN$   
 $\sum_{i=1}^n x_i y_i = m \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i$

☆ **สิ่งที่ควรรู้**

(1) ตัวแปรต้นนิยมแทนด้วย x ตัวแปรตามนิยมแทนด้วย y ( แต่ในบางครั้งจะขึ้นอยู่กับโจทย์ ) และต้องเอาตัวแปรต้นทำนายตัวแปรตาม ห้ามเอาตัวแปรตามมาทำนายตัวแปรต้นย้อนกลับ

(2) สมการเส้นตรงที่ได้จะผ่านจุด  $( \bar{x} , \bar{y} )$  เสมอ

(3) การหาค่า m , c สามารถทำได้ 2 วิธี กล่าวคือ

3.1 ใช้การแก้สมการปกติ 2 สมการ 2 ตัวแปร

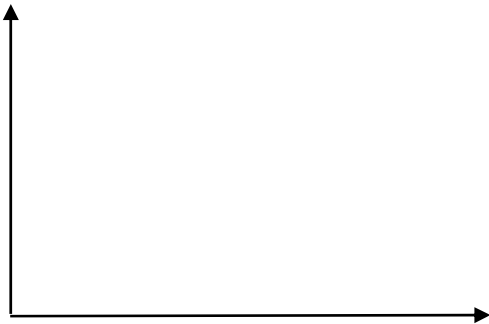
3.2 ใช้สูตร  $m = \frac{\sum xy - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$  ,  $c = \bar{y} - m\bar{x}$

Ex1. P'1 เป็นเจ้าของธุรกิจปั๊มน้ำมันโดยเริ่มขยายกิจการจากตอนเริ่มต้นที่มีเพียง 2 สาขาจนปัจจุบันมีถึง 10 สาขาได้ผลประกอบการ ( กำไร/เดือน ) แสดงตามตารางด้านล่าง

จำนวนปั้ม	2	3	5	7	9	10
กำไร / เดือน ( แสน )	1	3	7	11	15	17

หาก P'1 ต้องการขยายกิจการเปิดปั๊มน้ำมัน 100 ปั้ม อยากทราบว่าจะได้กำไรเดือนละเท่าไร

วิธีทำ    ตัวแปรต้น         $\rightarrow$     จำนวนปั๊มน้ำมัน ( x )  
           ตัวแปรตาม         $\rightarrow$     กำไร ( y )



จำนวนปั๊มน้ำมัน ( x )	กำไร ( y )	$x^2$	xy	
2	1	4	2	
3	3	9	9	
5	7	25	35	
7	11	49	77	
9	15	81	135	
10	17	100	170	
$\Sigma$	36	54	268	428



Ex2. จากกราฟวัดความสัมพันธ์ระหว่างเวลา  $t$  เป็นวินาที และระยะทาง  $s$  เป็นเมตรของการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นหนึ่งได้ดังตาราง

$t$	2	5	7	8
$s$	1	2	3	4

ถ้าความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่นี้เป็นแบบเส้นตรงแล้ว จะทำนายเวลาที่ใช่เป็นเท่าใดเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ได้ทาง 6.25 เมตร (ตอบ 3)

1. 10 วินาที                      2. 12 วินาที                      3. 13 วินาที                      4. 15 วินาที

Ex3. จากสมการความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน  $Y = mX + c$  และกำหนดให้

$$\bar{X} = 5, \quad \bar{Y} = 7, \quad \sum_{i=1}^5 X_i Y_i = 115, \quad \sum_{i=1}^5 X_i^2 = 130, \quad \sum_{i=1}^5 Y_i^2 = 200$$

ถ้า  $X = 7$  จงหาว่า  $Y$  มีค่าได้ตามข้อใด (ตอบ 1)

1. -17                      2. 31                      3. 101                      4. 151

- Ex4.** จากการเก็บข้อมูลเกี่ยวกับผลการสอบกลางภาคและปลายภาคของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีผลดังนี้มีค่า  $\bar{X} = 25$  และ  $\bar{Y} = 55$  โดยที่สมการเส้นตรงแสดงความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนสอบกลางภาคกับปลายภาคผ่านจุด (2,9) ถ้านาย ก. สอบกลางภาคได้ 15 คะแนน เขาจะสอบปลายภาคได้สักกี่คะแนน (ตอบ 1)
1. 35
  2. 40
  3. 45
  4. 50

- Ex5.** ความสัมพันธ์ระหว่างรายได้ (X) และรายจ่าย (Y) โดยเฉลี่ยต่อเดือนของผู้มีรายได้ในอำเภอแห่งหนึ่งเป็น

$$Y = 0.85X + 200$$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ ไม่ถูกต้อง (ตอบ 4)

1. บุคคล 2 คนมีรายได้ต่างกัน 1000 บาท จะมีรายจ่ายต่างกันโดยประมาณอยู่ 850 บาท
2. แต่ละบุคคลจะมีรายจ่ายโดยเฉลี่ยโดยประมาณ 1900 บาท เมื่อมีรายได้โดยเฉลี่ย 2000 บาท
3. บุคคลหนึ่งมีรายได้ 1500 บาท จะมีรายจ่ายเฉลี่ยประมาณ 1475 บาท
4. แต่ละบุคคลในอำเภอนี้ จะมีรายได้ที่มากกว่ารายจ่าย

Ex6. จงพิจารณาข้อมูล X และ Y ต่อไปนี้

X	-2	-1	0	1	2
Y	1	a	a + 1	a + 2	a + 6

เมื่อ a เป็นค่าคงตัวและให้ X และ Y มีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเป็นเส้นตรง โดยที่ ค่า Y เฉลี่ยเลขคณิตได้ 4.4  
ถ้า  $x = 2$  แล้วจะประมาณค่า Y ได้เท่าใด (ตอบ 3)

4

2. 6

3. 8

4. 10

→ ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลที่อยู่ในรูปอนุกรมเวลา ( Time series Data )

คือ การพยากรณ์ค่าตัวแปรตาม เมื่อตัวแปรต้นเป็นข้อมูลเชิงคุณภาพ ( เช่น ปี , เดือน )

โดยเราจำเป็นต้องสมมติตัวเลขขึ้นมาแทนค่าตัวแปรต้นเหล่านั้น ดังนี้

(1) ถ้าโจทย์ให้จำนวนตัวแปรต้นมาเป็น จำนวนคี่

(2) ถ้าโจทย์ให้จำนวนตัวแปรต้นมาเป็น จำนวนคู่

Ex1. ข้อมูลต่อไปนี้ แสดงยอดขายเครื่องสูบน้ำ ของบริษัทแห่งหนึ่ง ตั้งแต่ พ.ศ. 2530 ถึง พ.ศ. 2534

พ.ศ.	2530	2531	2532	2533	2534
ยอดขายเครื่องสูบน้ำ ( ×1,000 เครื่อง )	1	2	4	5	7

1.1 จงเขียนแผนภาพการกระจาย

1.2 จงหาสมการของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างเวลาและยอดขายเครื่องสูบน้ำเพื่อทำนายยอดขาย

1.3 จงทำนายยอดขายเครื่องสูบน้ำในปี พ.ศ. 2537

1.4 จงทำนายยอดขายเครื่องสูบน้ำ เฉลี่ยใน 6 เดือนแรกของปี พ.ศ. 2536

ปี พ.ศ.	x	y	xy	x <sup>2</sup>
2530	-2	1	-2	4
2531	-1	2	-2	1
2532	0	4	0	0
2533	1	5	5	1
2534	2	7	14	4
Σ	0	19	15	10

Ex2. ข้อมูลต่อไปนี้นี้เป็นรายได้หน่วยล้านบาทของบริษัทแห่งหนึ่งจำแนกตามรายเดือน ปี 2550 เป็นดังนี้

เดือน	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.	มิ.ย.
รายได้ ( ล้านบาท )	1.2	1.5	2.0	3.0	3.5	4.5

จงประมาณว่าในเดือนสิงหาคม ปี พ.ศ. 2550 นี้บริษัทจะมีรายได้เท่าใด

5 ล้านบาท

2. 5.5 ล้านบาท

3. 5.64 ล้านบาท

4. 5.75 ล้านบาท

ปี พ.ศ.	x	y	xy	$x^2$
ม.ค.	-5	1.2	-6	25
ก.พ.	-3	1.5	-4.5	9
มี.ค.	-1	2.0	-2	1
เม.ย.	1	3.0	3	1
พ.ค.	3	3.5	10.5	9
มิ.ย.	5	4.5	22.5	25
$\Sigma$	0	15.7	23.5	70

● ข้อสอบ PAT1 ( 5 ครั้งล่าสุด ) ออกทุกครั้ง !!!

1. กำหนดให้  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5)$  เป็นจุด 5 จุดบนระนาบ

$$\text{โดยที่ } \sum_{i=1}^5 x_i = 20, \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 100, \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 45, \quad \sum_{i=1}^5 y_i^2 = 485 \quad \text{และ} \quad \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 220$$

ถ้าความสัมพันธ์ระหว่าง  $x_i$  และ  $y_i$  เป็นความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง  $y = ax + b$  เมื่อ  $x$  เป็นตัวแปรอิสระ และ  $a, b$  เป็นจำนวนจริง

พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าถูกหรือผิด

(ก)  $a^2 + b^2 = 5$

(ข) ถ้า  $x$  เป็นจำนวนเต็ม แล้ว  $y$  เป็นจำนวนคี่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง ( ครั้งที่ 15 มี.ค. 58 ) ( ตอบ 1 )

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

2. จากการสำรวจปริมาณอาหารเสริมที่ใช้เลี้ยงสัตว์ชนิดหนึ่ง จำนวน 8 ตัว ได้ข้อมูลซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอายุ (ปี) ของสัตว์ชนิดนี้ และปริมาณอาหารเสริม ( กิโลกรัม ) ที่ใช้เลี้ยงสัตว์ดังกล่าวต่อสัปดาห์ ปรากฏผลดังนี้

อายุ(ปี) : $x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
ปริมาณอาหารเสริมต่อสัปดาห์ ( กิโลกรัม ) : $y$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$

$$\text{โดยที่ } \sum_{i=1}^8 x_i = 40, \quad \sum_{i=1}^8 y_i = 48, \quad \sum_{i=1}^8 x_i^2 = 210, \quad \sum_{i=1}^8 y_i^2 = 380, \quad \sum_{i=1}^8 x_i y_i = 270$$

$$\text{และ } 3 = x_1 < x_2 < \dots < x_8 < 10$$

สมมติว่ากราฟแผนภาพกระจายที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณอาหารเสริมที่ใช้เลี้ยงสัตว์ต่อสัปดาห์ และอายุของสัตว์ดังกล่าว อยู่ในรูปแบบเส้นตรง ถ้าสัตว์ชนิดนี้มีอายุ 4 ปี จะต้องใช้ปริมาณอาหารเสริมที่ใช้เลี้ยงสัตว์ต่อสัปดาห์ประมาณกี่ กิโลกรัม ( ครั้งที่ 16 ต.ค. 58 ) ( ตอบ 3 )

3. กำหนดข้อมูล  $x$  และ  $y$  มีความสัมพันธ์ ดังนี้

$x$	1	3	4	5	7
$y$	0	3	6	7	9

โดยที่  $x$  และ  $y$  มีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง ถ้า  $y = 8$  แล้วค่าของ  $x$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้  
(ครั้งที่ 17 มี.ค. 59) (ตอบ 2)

1. 5.94
2. 5.86
3. 7.1
4. 7.23
5. 8

4. กำหนดข้อมูล 2 ชุด คือข้อมูล ( $x$ ) และ ข้อมูล ( $y$ ) ดังนี้

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$y$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$

โดยที่  $1 \leq x_i \leq 25$  สำหรับ  $i = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 175, \quad \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 1575, \quad \sum_{i=1}^5 (x_i + y_i) = 275, \quad \sum_{i=1}^5 (20x_i - y_i) = 250$$

และ ข้อมูลทั้งสองชุดมีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง คือ  $y = mx + c$  เมื่อ  $m, c$  เป็นจำนวนจริง  
ถ้า  $x = 4$  แล้วค่าประมาณของ  $y$  จะเท่ากับเท่าใด (ครั้งที่ 18. ต.ค. 59) (ตอบ 43.5)

5. ให้  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 5 รูป มีข้อมูล ดังนี้

	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$
ความกว้าง (x)	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
ความยาว (y)	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$

โดยที่  $0 < x_i \leq 10$  สำหรับ  $i = 1, 2, 3, 4, 5$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของความกว้างของรูปสี่เหลี่ยม 5 รูป เท่ากับ 5 หน่วย

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของความยาวของรูปสี่เหลี่ยม 5 รูป เท่ากับ 8 หน่วย

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม 5 รูป เท่ากับ 51.8 ตารางหน่วย

และความแปรปรวนของความกว้างเท่ากับ 12

สมมติว่ากราฟแผนภาพการกระจายที่แสดงความสัมพันธ์ความกว้างและความยาว อยู่ในรูปแบบเส้นตรง

ถ้าสร้างรูปสี่เหลี่ยมมีความกว้าง 2 หน่วย แล้วความยาว (โดยประมาณ) ของรูปสี่เหลี่ยมนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

(ครั้งที่ 19 มี.ค. 60) (ตอบ 1)

1. 5.05 หน่วย
2. 5.55 หน่วย
3. 5.75 หน่วย
4. 6.05 หน่วย
5. 6.55 หน่วย



**ข้อที่ 3. กำหนดการเชิงเส้น ( Linear Programming )****→ กราฟของอสมการเชิงเส้น**

หลักการวาดกราฟของอสมการเชิงเส้นมีดังนี้

- (1) ให้วาดเหมือนกราฟของสมการ โดยที่ ถ้าเป็น  $<, >$  เป็นเส้นประ และ ถ้าเป็น  $\leq, \geq$  เป็นเส้นทึบ
- (2) ให้ลองแทนจุดพิกัดที่**ไม่ได้**อยู่บนกราฟลงในอสมการแล้วพิจารณาผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น
  - 2.1 ถ้าอสมการเป็นจริง ให้แรเงาไปทิศทางที่ครอบคลุมจุดดังกล่าว
  - 2.2 ถ้าอสมการเป็นเท็จ ให้แรเงาไปทิศทางตรงข้ามกับจุดดังกล่าว

**Ex1.** จงวาดกราฟอสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1)  $-2x + 5y \leq 20$

$$(2) \quad 3x - 2y + 6 > 0$$

$$(3) \quad x < 2y$$

$$(4) \quad 2y \leq -\frac{1}{2}x$$

(5)  $y \geq 6$

(6)  $x < -2$

(7)  $2y - 4 > 0$

(8)  $3x - 2 \leq 0$

(9)  $y \geq 0$

(10)  $x \leq 0$



กราฟของระบบอสมการเชิงเส้น

Ex1.  $x + y \leq 7$  ,  $x \geq 1$  ,  $y \geq 0$

Ex2.  $x + y - 1 \leq 0$  ,  $-x + y + 1 \geq 0$  ,  $-2x - y + 1 \leq 0$

Ex3.  $3x + 2y \leq 12$  ,  $x + 2y \leq 8$  ,  $x \geq 0$  ,  $y \geq 0$

Ex4.  $2x + 3y \geq 15$  ,  $3x + y \geq 12$  ,  $x \geq 0$  ,  $y \geq 0$

Ex5.  $3x + y \leq 6$  ,  $-4x + 3y \leq 12$  ,  $x \geq 0$  ,  $y \geq 0$

Ex6.  $3x + 5y \geq 15$  ,  $x - 2y \leq 2$  ,  $x \geq 0$  ,  $y \geq 0$

Ex7.  $4x + 2y \geq 100$  ,  $2x+4y \geq 140$  ,  $x \leq 60$  ,  $y \leq 40$

Ex8.  $y - x \leq 4$  ,  $x + 3y \geq 9$   
 $x + y \leq 12$  ,  $x \geq 0$  ,  $y \geq 0$

Ex9.  $5x + 2y \leq 300$  ,  $x + y \leq 90$  ,  $5x - y \geq -20$  ,  
 $0 \leq y \leq 70$  ,  $x \geq 0$



→ การแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีใช้กราฟ

- (1) สมมติให้ได้เสียก่อนว่า จะให้  $x$  และ  $y$  แทนอะไร
- (2) สร้างฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ( Objective function ) โดยดูจากสิ่งที่โจทย์ถาม
- (3) สร้างฟังก์ชันอสมการเงื่อนไข ( Constraint inequalities )
- (4) วาดกราฟของอสมการเงื่อนไขทั้งหมด เพื่อหาอาณาบริเวณที่หาคำตอบได้ ( Feasible region )
- (5) นำพิกัดจุดมุมของรูปหลายเหลี่ยมของอาณาบริเวณที่หาคำตอบได้แทนลงในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ เพื่อหาค่าสูงสุด หรือ ค่าต่ำสุดที่ต้องการ

Ex1. ร้านขนมปังแห่งหนึ่ง จ้างคนงานชายชั่วโมงละ 15 บาท และ จ้างเด็กชั่วโมงละ 10 บาท

คนงานชายสามารถทำขนมปัง ได้ 24 ชิ้น และ เค้ก 6 ชิ้นต่อชั่วโมง

เด็กสามารถทำขนมปัง ได้ 12 ชิ้น และ เค้ก 10 ชิ้นต่อชั่วโมง

ถ้าร้านขนมปังต้องการทำขนมปังไม่ต่ำกว่า 504 ชิ้น และ เค้กไม่ต่ำกว่า 154 ชิ้น จะมีวิธีให้ คนงานชาย และ เด็กทำงานคนละกี่ชั่วโมง จึงจะเสียค่าใช้จ่ายน้อยสุด (ตอบ ชาย 19 ชั่วโมง และ เด็ก 4 ชั่วโมง)

Ex2. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตสินค้าออกมาจำหน่าย 2 ชนิด คือ ชนิด A และ B สินค้าชนิด A แต่ละชิ้นต้องผลิตด้วยเครื่องจักรเป็นเวลา 1 ชั่วโมง หลังจากนั้นต้องนำมาตกแต่งด้วยมืออีก 2 ชั่วโมง แต่ถ้าใช้เครื่องจักรดังกล่าวผลิตสินค้าชนิด B แต่ละชิ้นจะใช้เวลาผลิต 1.5 ชั่วโมง หลังจากนั้นนำมาตกแต่งด้วยมืออีก 1 ชั่วโมง

ถ้าในแต่ละวันเครื่องจักร และ คนที่ทำหน้าที่ตกแต่งทำงาน 8 ชั่วโมง สินค้าชนิด A ได้กำไรชิ้นละ 600 บาท สินค้า B ได้กำไรชิ้นละ 700 บาท ถ้าผู้จัดการของโรงงานต้องการกำไรจากการผลิตสินค้ามากที่สุด เขาควรผลิตสินค้าชนิดละกี่ชิ้นต่อวัน (ตอบ ควรผลิตสินค้า A 2 ชิ้น , สินค้า B 4 ชิ้นต่อวัน )

Ex3. บริษัทแห่งหนึ่งมีโรงงานอยู่ 2 แห่ง ในแต่ละวัน  
โรงงานที่หนึ่งผลิตสินค้าเกรด A ได้ 18 หน่วย เกรด B ได้ 15 หน่วย และ เกรด C ได้ 7 หน่วย  
สำหรับโรงงานที่สองผลิตสินค้า เกรด A ได้ 9 หน่วย เกรด B ได้ 30 หน่วย และ เกรด C ได้ 1 หน่วย  
บริษัทต้องการผลิตสินค้าส่งลูกค้าโดยเป็นสินค้า เกรด A 162 หน่วย , เกรด B 315 หน่วย และ เกรด C 28 หน่วย  
**บริษัทควรจะเปิดโรงงานผลิตสินค้าแห่งละกี่วัน จึงจะเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด** ถ้าค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้าของ  
โรงงานที่หนึ่ง และ โรงงานที่สองเท่ากับ 40,000 บาท/วัน และ 30,000 บาท/วัน ตามลำดับ  
( ตอบ เปิดโรงงานที่หนึ่ง 5 วัน , โรงงานที่สอง 8 วัน )

Ex4. เจ้าของโรงงานแห่งหนึ่งมีสารเคมีในการทำปุ๋ยอยู่ 2 ชนิด คือ A และ B  
เขา ผสมสารเคมี A และ B ทำปุ๋ยชนิดที่หนึ่งด้วย อัตราส่วน 3 : 1  
ผสมสารเคมี A และ B ทำปุ๋ยชนิดที่สองด้วย อัตราส่วน 1 : 3  
ถ้าปุ๋ยชนิดที่หนึ่งได้กำไรกิโลกรัมละ 30 บาท และ ชนิดที่สองกำไรกิโลกรัมละ 60 บาท  
ถ้าเขามีสารเคมี A และ B อยู่เพียง 60 กิโลกรัม และ 30 กิโลกรัม ตามลำดับ เขาจะได้กำไรสูงสุดเท่าใด

● ข้อสอบ PAT1 ( 5 ครั้งล่าสุด ) ออกทุกครั้ง !!!

1. นาย ก. วางแผนปลูกมันหรือสับปะรดบนที่ดิน 150 ไร่ โดยมีข้อมูลในการลงทุนดังนี้ ในการปลูกมันจะต้องลงทุนค่าต้นกล้าไร่ละ 200 บาท และใช้แรงงานไร่ละ 10 ชั่วโมง ในการปลูกสับปะรดจะต้องลงทุนค่าต้นกล้าไร่ละ 300 บาท และ ใช้แรงงานไร่ละ 12.5 ชั่วโมง นาย ก. มีเงินลงทุนสำหรับต้นกล้า 40,000 บาท และมีแรงงานไม่เกิน 1,850 ชั่วโมง ถ้าปลูกมันได้กำไรไร่ละ 1,500 บาท ปลูกสับปะรดจะได้กำไรไร่ละ 2,000 บาท ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (ครั้งที่ 15 มี.ค. 58) (ตอบ 3)
1. ปลูกสับปะรดอย่างเดียว จะได้กำไรสูงสุด 300,000 บาท
2. ปลูกมัน 10 ไร่ ปลูกสับปะรด 140 ไร่ จะได้กำไรสูงสุด 295,000 บาท
3. ปลูกมัน 50 ไร่ ปลูกสับปะรด 100 ไร่ จะได้กำไรสูงสุด 275,000 บาท
4. ปลูกมัน 110 ไร่ ปลูกสับปะรด 40 ไร่ จะได้กำไรสูงสุด 245,000 บาท

2. ภายใต้สมการข้อจำกัด ต่อไปนี้

$$x + 2y \leq 4 \quad , \quad x - y \leq 1 \quad , \quad x + y \geq 1 \quad , \quad x \geq 0 \quad \text{และ} \quad y \geq 0$$

สมการจุดประสงค์ในข้อใดต่อไปนี้ ที่มีค่ามากที่สุด (ครั้งที่ 16 ต.ค. 58) (ตอบ 5)

1.  $z = 2x + 2y$

2.  $z = 3x + 2y$

3.  $z = 2x + 3y$

4.  $z = x + 4y$

5.  $z = 4x + y$

3. กำหนดสมการจุดประสงค์  $P = 7x - 5y$  และอสมการข้อจำกัดดังนี้

$$\begin{aligned} x + 3y - 12 &\geq 0, & 3x + y - 12 &\geq 0, \\ x - 2y + 17 &\geq 0 & \text{และ} & 9x + y - 56 &\leq 0 \end{aligned}$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- (ก) ถ้า  $(a, b)$  เป็นจุดมุมที่สอดคล้องกับอสมการข้อจำกัดและให้ค่า  $P$  มากที่สุด แล้ว  $a^2 + b^2 = 40$
- (ข) ผลต่างระหว่างค่ามากที่สุดและค่าน้อยที่สุดของ  $P$  เท่ากับ 70
- (ค) ถ้า  $A$  และ  $B$  เป็นพิกัดของจุดมุมที่สอดคล้องกับอสมการข้อจำกัด โดยที่  $P$  มีค่ามากที่สุดที่จุด  $A$  และ  $P$  มีค่าน้อยที่สุดที่จุด  $B$  แล้วจุด  $A$  และ  $B$  อยู่บนเส้นตรง  $7x + 5y = 52$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (ครั้งที่ 17 มี.ค. 59) (ตอบ 4)

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

4. กำหนดให้  $P = 4x + 5y$  เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์ โดยมีสมการข้อจำกัด ดังนี้

$$x + 2y \geq 10$$

$$x + y \geq 6$$

$$3x + y \geq 8$$

$$x \geq 0 \text{ และ } y \geq 0$$

ค่าของ  $P$  มีค่าน้อยที่สุด ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (ครั้งที่ 18. ต.ค.59) (ตอบ 3)

1. 24.0
2. 26.8
3. 28.0
4. 29.0
5. 40.0

5. กำหนดให้  $x \geq 0$  และ  $y \geq 0$

$$\text{ถ้า } \left( \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right)^{2x+3y} \leq (\sqrt{2}+1)^{12} \quad \text{และ} \quad \left( \frac{1}{\sqrt{2}+1} \right)^{3x-2y} \geq \left( \frac{1}{\sqrt{2}+1} \right)^5$$

แล้ว  $2x + 5y$  มีค่ามากที่สุดเท่ากับข้อใด (ครั้งที่ 18. ต.ค.59) (ตอบ 20)



6. ให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงบวก

$$\text{กำหนดให้ } P = ax - 15y$$

โดยมีสมการข้อจำกัดดังนี้

$$3x + by \geq 9$$

$$3x + 2by \leq 18$$

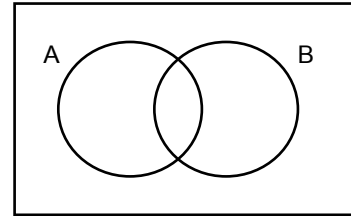
$$1 \leq x \leq 5 \quad \text{และ} \quad y \geq 0$$

ถ้าค่าของ  $P$  มีค่าน้อยที่สุด เท่ากับ  $-8.25$  และ ค่าของ  $P$  มีค่ามากที่สุด เท่ากับ  $15$

แล้ว ค่าของ  $a^2 + b^2$  เท่ากับเท่าใด (ครั้งที่ 19. มี.ค.60) (ตอบ 109)

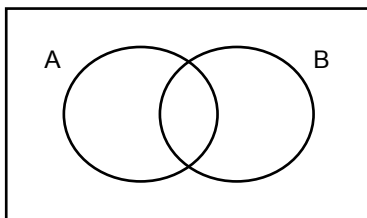
ข้อที่ 4. การหาจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

→ โจทย์ 2 เซต



→ โจทย์แบบที่ 1. โจทย์แผนภาพเวนนิง – ออยเลอร์

Ex1.

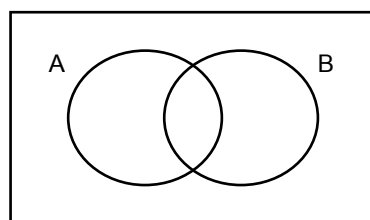


$\mathcal{U}$

ในแผนภาพที่กำหนดให้  $\mathcal{U}$ , A, B และ  $A \cap B$  มีจำนวนสมาชิก 100, 40, 25 และ 16 ตัว ตามลำดับ จงเติมจำนวนสมาชิกของเซตต่างๆ ลงในตารางต่อไปนี้

เซต	$A - B$	$B - A$	$A \cup B$	$A'$	$B'$	$(A \cup B)'$
จำนวนสมาชิก						

Ex2. กำหนด  $n(\mathcal{U}) = 90$ ,  $n(A) = 60$ ,  $n(B) = 55$  และ  $n(A \cap B) = 30$  จงหาจำนวนสมาชิกของเซตในแต่ละข้อ



$\mathcal{U}$

1.  $A \cup B$

2.  $A - B$

3.  $B - A$

4.  $A'$

5.  $B'$

6.  $A \cap B'$

7.  $A' \cap B'$

8.  $A' - B'$

9.  $A \cup B'$

10.  $A' \cup B'$

11.  $A' \cup B$

12.  $B \cap A'$

Ex3. กำหนด  $n(A) = 5$  ,  $n(B) = 7$  และ  $n(A \cap B) = 2$  จงหา  $n[(A-B) \cup (B-A)]$

Ex4. กำหนด  $n(A) = 20$  ,  $n(B) = 30$  และ  $n(A \cup B) = 40$  จงหา  $n(A \cap B)$

Ex5. ให้ A และ B เป็นสับเซตของ  $\mathcal{U}$  และ  $n(\mathcal{U}) = 50$  ถ้า  $n(A' \cap B') = 10$  และ  $n(A' \cap B) = n(A \cap B') = 15$  แล้ว  $n(A \cap B)$  เท่ากับเท่าใด

Ex6. จากการสอบถามผู้ชายจำนวน 50 คน พบว่า มี 29 คน ชอบเจนนี มี 21 คน ชอบพอลล่า มี 10 คน ชอบทั้ง เจนนี และ พอลล่า จงหา

1. มีกี่คนชอบ เจนนี หรือ พอลล่า
2. มีกี่คนไม่ชอบ เจนนี และ ไม่ชอบ พอลล่า
3. มีกี่คนชอบ เจนนี แต่ ไม่ชอบ พอลล่า
4. มีกี่คนชอบ พอลล่า แต่ ไม่ชอบ เจนนี
5. มีกี่คนชอบ เจนนี หรือ ไม่ชอบ พอลล่า
6. มีกี่คนชอบ พอลล่า หรือ ไม่ชอบ เจนนี

Ex7. จากการตรวจสุขภาพของคนกลุ่มหนึ่งพบว่า มีคนที่สายตาสั้นจำนวน 35% ของคนทั้งหมด มีคนที่ฟันผุจำนวน 48 % ของคนทั้งหมด และมีคนที่สายตาไม่สั้นและฟันไม่ผุจำนวน 29 % ของคนทั้งหมด จงหาจำนวนเปอร์เซ็นต์ของ

1. คนที่สายตาสั้น หรือฟันผุ
2. คนที่สายตาสั้น และฟันผุ
3. คนที่สายตาสั้น แต่ฟันไม่ผุ
4. คนที่สายตาไม่สั้น แต่ฟันผุ
5. คนที่สายตาสั้น หรือฟันไม่ผุ

## → โจทย์แบบที่ 2. โจทย์ชาย – หญิง

Ex1. ชมรมถ่ายภาพมีสมาชิก 25 คน เป็นนักเรียนชาย 14 คน ปรากฏว่ามีสมาชิกที่ถ่ายภาพเป็น 9 คน มีสมาชิกที่เป็นนักเรียนหญิงหรือถ่ายภาพเป็น 16 คน จงหาว่าจำนวนสมาชิกที่เป็นนักเรียนหญิง และ ถ่ายภาพเป็นมีกี่คน (ตอบ 4 คน)

Ex2. ห้องเรียนห้องหนึ่งมีนักเรียนชาย 30 คน และนักเรียนหญิง 20 คน จากการสอบวิชาคณิตศาสตร์และฟิสิกส์พบว่า มีนักเรียนสอบตกวิชาคณิตศาสตร์ 15 คน ในจำนวนนี้เป็นนักเรียนชาย 7 คน มีนักเรียนสอบตกวิชาฟิสิกส์ 10 คน ในจำนวนนี้เป็นนักเรียนชาย 4 คน มีนักเรียนสอบตกทั้งสองวิชา 3 คน ในจำนวนนี้เป็นนักเรียนหญิง 1 คน จงหา

1. จำนวนนักเรียนที่สอบคณิตศาสตร์ตก แต่สอบฟิสิกส์ได้
2. จำนวนนักเรียนที่สอบฟิสิกส์ตก แต่สอบคณิตศาสตร์ได้
3. จำนวนนักเรียนที่สอบได้ทั้งสองวิชา
4. จำนวนนักเรียนชายที่สอบได้ทั้งสองวิชา
5. จำนวนนักเรียนหญิงที่สอบได้เพียงวิชาเดียว

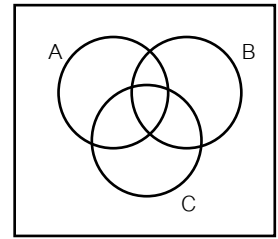
**→ โจทย์แบบที่ 3. โจทย์ 2 เซตไม่เกี่ยวข้องกัน**

Ex1. ในเดือนที่แล้ว P'1 มาสอนเพียง 11 วันเท่านั้น และพบว่าไม่มีวันใดในเดือนนั้นที่ P'1 จะมาสอนเต็มวัน กล่าวคือ ถ้าไม่ขาดสอนตอนเช้า ก็ขาดสอนตอนบ่าย ถ้า P'1 ขาดสอนตอนเช้า 17 วัน และ ขาดสอนตอนบ่าย 12 วัน จงหา

1. จำนวนวันที่ P'1 ขาดสอนทั้งวัน
2. จำนวนวันที่ P'1 มาสอนตอนเช้า
3. จำนวนวันที่ P'1 มาสอนตอนบ่าย
4. จำนวนวันที่ต้องสอนทั้งหมดในเดือนที่แล้ว

Ex2. ระหว่างไปพักตากอากาศ มีฝนตก 13 วัน ถ้าหากฝนตกตอนเช้า ตอนบ่ายอากาศจะแจ่มใส แต่ถ้าวันไหนฝนตกตอนบ่าย ตอนเช้าอากาศก็ต้องแจ่มใส ถ้าระหว่างไปพักตากอากาศ มีอากาศแจ่มใสตอนเช้า 11 วัน และอากาศแจ่มใสตอนบ่าย 12 วัน ถามว่าไปพักตากอากาศกี่วัน (ตอบ 18 วัน)

→ โจทย์ 3 เซต



→ โจทย์แบบที่ 1. โจทย์แผนภาพเวนนิง – ออยเลอร์

Ex1. กำหนด  $n(\mathcal{U}) = 49$  ,  $n(A) = 20$  ,  $n(B) = 25$  ,  $n(C) = 18$  ,  $n(A \cap B) = 13$  ,  $n(A \cap C) = 11$  ,  $n(B \cap C) = 12$  ,  $n(A \cap B \cap C) = 8$  จงหาจำนวนสมาชิกของเซตในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.  $A \cup B \cup C$

2.  $A - B$

3.  $A' \cap B'$

4.  $A' \cap C'$

5.  $A' \cup B'$

6.  $A' \cup C'$

7.  $C - A$

8.  $B - C$

9.  $(A - B) - C$

10.  $(A \cap C \cap B')$

11.  $(A \cap B' \cap C')$

12.  $(C \cap A' \cap B')$

13.  $A' \cap B' \cap C'$

14.  $B \cap A' \cap C$

15.  $A \cap B \cap C'$

**Ex2.** ในการสอบถามรสนิยมในการเลือกเครื่องดื่มของนักเรียน ม.4. โรงเรียน Saint Leo ( มัธยมวัดสิงห์ ) จำนวน 100 คน

พบว่า	มีนักเรียนที่ชอบดื่มน้ำอัดลม	40	คน	
	มีนักเรียนที่ชอบดื่มน้ำผลไม้	45	คน	
	มีนักเรียนที่ชอบดื่มน้ำเปล่า	39	คน	
	มีนักเรียนที่ชอบดื่มน้ำอัดลม และ น้ำผลไม้	12	คน	
	มีนักเรียนที่ชอบดื่มน้ำอัดลม และ น้ำเปล่า	15	คน	
	มีนักเรียนที่ชอบดื่มน้ำผลไม้ และ น้ำเปล่า	10	คน	
	และมีนักเรียนที่ชอบดื่มน้ำทั้งสามชนิด	5	คน	จงหาจำนวนคนที่

1. ชอบดื่มน้ำเหล่านี้อย่างน้อยหนึ่งชนิด
2. ชอบดื่มน้ำเหล่านี้เพียงสองชนิด
3. ชอบดื่มน้ำเหล่านี้เพียงชนิดเดียว
4. ไม่ชอบดื่มน้ำเหล่านี้เลยแม้แต่นิดเดียว

**Ex3.** จากการสำรวจความนิยมในการฟังเพลงของคน 300 คน พบว่าแต่ละคนชอบเพลงลูกทุ่ง เพลงลูกกรุง หรือ เพลงไทยเดิม อย่างน้อยหนึ่งประเภท ปรากฏว่า

ชอบเพลงลูกทุ่ง 120 คน	ชอบทั้งเพลงลูกกรุงและเพลงไทยเดิม 45 คน
ชอบเพลงลูกกรุงอย่างเดียว 70 คน	ชอบทั้งเพลงลูกทุ่งและเพลงลูกกรุง แต่ไม่ชอบเพลงไทยเดิม 30 คน
ชอบเพลงไทยเดิมอย่างเดียว 80 คน	ไม่ชอบเพลงไทยเดิมและไม่ชอบเพลงลูกกรุง 50 คน

อยากทราบว่า มีคนชอบเพลงลูกทุ่ง และ เพลงไทยเดิม แต่ไม่ชอบเพลงลูกกรุงกี่คน ( 25 คน )



Ex4. ถ้ากำหนดจำนวนสมาชิกของเซตต่าง ๆ ตามตารางต่อไปนี้

เซต	$A \cup B$	$A \cup C$	$B \cup C$	$A \cup B \cup C$	$A \cap B \cap C$
จำนวนสมาชิก	25	27	26	30	7

แล้วจำนวนสมาชิกของ  $(A \cap B) \cup C$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (O-NET'51) (ตอบ 1)

1. 23                                      2. 24                                      3. 25                                      4. 26

## → โจทย์แบบที่ 2. โจทย์ใช้สูตร

Ex1. จากการสำรวจชาวสวนในอำเภอแห่งหนึ่งซึ่งมี 1,000 ครัวเรือน พบว่าแต่ละครอบครัวปลูกผลไม้อย่างน้อยหนึ่งชนิด คือ เงาะ , มังคุด , หรือ ทุเรียน ปรากฏว่า 400 ครัวเรือนไม่ปลูกทุเรียน , 380 ครัวเรือนไม่ปลูกมังคุด , 542 ครัวเรือนไม่ปลูกเงาะ , 294 ครัวเรือนปลูกทั้งเงาะและมังคุด , 277 ครัวเรือนปลูกทั้งมังคุดและทุเรียน , 190 ครัวเรือนปลูกทั้งเงาะและทุเรียน มีกี่ครัวเรือนที่ปลูกผลไม้ทั้ง 3 ชนิด

## → โจทย์แบบที่ 3. โจทย์สมมติตัวแปร

Ex1. นักเรียน 78 คน จะต้องเรียนพิเศษอย่างน้อย 1 วิชา จากวิชาคณิตศาสตร์ เคมี และฟิสิกส์ ไม่มีใครเลยที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์และเคมี , ในจำนวนนี้มี 16 คนที่เรียนวิชาฟิสิกส์เท่านั้น , มีอยู่ 5 คนที่เรียนคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ , มี 10 คนที่เรียนเคมีและฟิสิกส์ และ จำนวนคนที่เรียนเคมีมากกว่าเรียนคณิตศาสตร์อยู่ 6 คน มีนักเรียนที่เรียนเคมีกี่คน (ตอบ 34 คน)

Ex2. จากการสำรวจการลงทะเบียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ และ เคมี ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 200 คน พบว่า มีนักเรียนไม่เลือกเรียนวิชาใดเลย 18 คน  
มีนักเรียนที่เลือกเรียนคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ แต่ไม่เลือกเคมี 44 คน  
มีนักเรียนที่เลือกเรียนคณิตศาสตร์และเคมี แต่ไม่เลือกฟิสิกส์ 38 คน  
มีนักเรียนที่เลือกเรียนเคมีและฟิสิกส์ แต่ไม่เลือกคณิตศาสตร์ 42 คน  
มีนักเรียนที่เลือกเรียนคณิตศาสตร์ 120 คน  
มีนักเรียนที่เลือกเรียนฟิสิกส์ 116 คน  
มีนักเรียนที่เลือกเรียนเพียงวิชาเดียว 32 คน

จงหาจำนวนนักเรียนที่

- (1) เลือกเรียนทั้งสามวิชา (ตอบ 26 )
- (2) เลือกเรียนคณิตศาสตร์เพียงวิชาเดียว (ตอบ 12 )
- (3) เลือกเรียนฟิสิกส์เพียงวิชาเดียว (ตอบ 4 )

Ex3. กำหนดให้  $A, B, C$  เป็นเซต  $n(A \cup B) = 32$  ,  $n(A \cup C) = 39$  ,  $n(B \cup C) = 35$  ,  $n(A \cap B \cap C) = 2$  ,  
 $n[(A \cap B) - C] = 8$  ,  $n[(A \cap C) - B] = 4$  ,  $n[(B \cap C) - A] = 6$  ดังนั้น  $n(A \cup B \cup C)$  เท่ากับเท่าใด (ตอบ 43)

Ex4. ในการสำรวจความนิยมของคนกลุ่มหนึ่งจำนวน 40 คน พบว่านิยมเครื่องดื่มอย่างน้อยหนึ่งชนิด คือ โค้ก 21 คน , เป๊ปซี่ 16 คน และเบียร์สิงห์ 19 คน และนิยมทั้งสามชนิด 3 คน มีผู้นิยมชนิดเดียวกี่คน (ตอบ 27 คน)



3. ให้  $S'$  แทนคอมพลีเมนต์ของ  $S$  และ  $n(S)$  แทนจำนวนสมาชิกของเซต  $S$  ให้  $A, B$  และ  $C$  เป็นเซตใดๆ โดยที่  $A \cap (B \cup C)' = \phi$ ,  $n(A) = 12$ ,  $n(B) = 15$ ,  $n(C) = 16$ ,  $n(A \cup B \cup C) = 20$  และ  $n(A \cap B) = n(B \cap C) = n(A \cap C)$  ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง (ครั้งที่ 16. ต.ค. 58) (ตอบ 5)

1.  $n(A \cap B \cap C) = 10$
2.  $n(A \cap B) = 11$
3.  $n(A' \cap B) = 4$
4.  $n[(A \cup B) \cap C] = 12$
5.  $n[(A \cup B)' \cap C] = 5$

4. ในการสำรวจความชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ วิชาภาษาไทย และ วิชาภาษาอังกฤษ ของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง พบว่า มีนักเรียนชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 150 คน  
มีนักเรียนชอบเรียนวิชาภาษาไทย 80 คน  
มีนักเรียนชอบเรียนวิชาภาษาอังกฤษ 60 คน  
และ มีนักเรียน 30 คน ชอบเรียนทั้งสามวิชา  
นักเรียนกลุ่มนี้มีจำนวนอย่างมากกี่คน (ครั้งที่ 16. ต.ค. 58) (ตอบ 230)

5. ในการสำรวจนักเรียนห้องหนึ่ง เกี่ยวกับความชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ วิชาภาษาอังกฤษ และ วิชาภาษาไทย พบว่านักเรียนในห้องนี้ชอบเรียนวิชาดังกล่าวอย่างน้อย 1 วิชา และ

มี	24	คน	ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์
มี	22	คน	ชอบเรียนวิชาภาษาอังกฤษ
มี	21	คน	ชอบเรียนวิชาภาษาไทย
มี	21	คน	ชอบเรียนเพียงวิชาเดียว
และมี	4	คน	ชอบเรียนทั้งสามวิชา

จำนวนนักเรียนที่ชอบเรียนวิชาภาษาอังกฤษ หรือ วิชาภาษาไทยแต่ไม่ชอบวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (ตอบ 3)

( ครั้งที่ 17. มี.ค.59 )

- 16 คน
- 17 คน
- 18 คน
- 19 คน
- 20 คน

6. ให้  $S'$  แทนคอมพลีเมนต์ของเซต  $S$  และ

$n(S)$  แทนจำนวนสมาชิกของเซต  $S$

กำหนดให้  $\mathcal{U}$  แทนเอกภพสัมพัทธ์ โดยที่  $n(\mathcal{U}) = 70$

ถ้า  $A, B$  และ  $C$  เป็นสับเซตของ  $\mathcal{U}$  โดยที่  $A \cap B \cap C \neq \phi$  และ

$n(A \cap B') = 25$  ,  $n(B - C) = 18$  ,  $n(C \cap A') = 16$  และ  $n[(A \cup B)' - C] = 7$

แล้ว  $n(A \cap B \cap C)$  เท่ากับเท่าใด ( ครั้งที่ 18. ต.ค.59 ) (ตอบ 4)

7. จากการสำรวจนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 80 คน เกี่ยวกับการเป็นสมาชิกของชมรม 3 ชมรม คือ ชมรมคณิตศาสตร์ ชมรมการแสดง และชมรมกีฬา ปรากฏว่ามี 30 คน เป็นสมาชิกของชมรมคณิตศาสตร์ โดยในจำนวนนี้มีนักเรียน 20 คน เท่านั้นที่เป็นสมาชิกของชมรมคณิตศาสตร์เพียงชมรมเดียว มี 5 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมการแสดงและชมรมกีฬา แต่ไม่เป็นสมาชิกของชมรมคณิตศาสตร์ และมี 10 คนที่ไม่เป็นสมาชิกของชมรมใดเลย

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- (ก) มี 15 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมอย่างน้อย 2 ชมรม  
 (ข) มี 55 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมใดชมรมหนึ่งเพียง 1 ชมรมเท่านั้น  
 (ค) มี 50 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมการแสดงหรือชมรมกีฬา

ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง (ครั้งที่ 19. มี.ค.60) (ตอบ 4)

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

8. ผลการสำรวจกลุ่มคนจำนวน 120 คน เกี่ยวกับสายตาสั้นและสายตาปกติ พบว่า

อัตราส่วนของจำนวนคนที่มีสายตาสั้นต่อจำนวนคนสายตาปกติเท่ากับ 3 : 2

ในกลุ่มคนที่มีสายตาสั้น มีอัตราส่วนของจำนวนผู้หญิงต่อจำนวนผู้ชายเท่ากับ 5 : 1

ในกลุ่มคนที่มีสายตาสั้น มีอัตราส่วนของจำนวนเด็กต่อจำนวนผู้ใหญ่เท่ากับ 1 : 3

ผลรวมของจำนวนผู้หญิงที่มีสายตาสั้นและจำนวนเด็กที่มีสายตาสั้นเท่ากับเท่าใด (ครั้งที่ 19. มี.ค.60) (ตอบ 72)

ข้อที่ 5. ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

● ลิมิตของฟังก์ชัน

→ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

ให้  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชัน โดยที่  $y = f(x)$  และ  $g(x)$  ตามลำดับ ถ้า  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  และ  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$

(1)  $\lim_{x \rightarrow a} C = C$  เมื่อ  $C$  เป็นค่าคงตัว

(2)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$

(3)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$

(4)  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B} ; B \neq 0$

(5)  $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot [f(x)] = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = C \cdot A$

(6)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = A^n$

→ วิธีการหาค่า  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

1. ให้แทน  $x = a$  ลงใน  $f(x)$  ได้ค่าเท่าไรตอบเท่านั้น โดยที่  $\frac{k}{0} = \infty$ ,  $\frac{0}{\infty} = 0$ ,  $\frac{\infty}{k} = \infty$ ,  $\frac{0}{0} = 0$

2. แต่ถ้าแทนแล้วได้ค่าเป็น  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$  (Indeterminate form) ห้ามสรุป!! ให้รีบทำต่อ โดยการ

(2.1) ดึงตัวร่วม

(2.2) แยก factor

(2.3) คูณด้วยคอนจูเกต

(2.4) ใช้กฎของโลปีตาล (L'Hopital's Rule)



ใช้ได้เฉพาะ  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{\text{diff เศษ}}{\text{diff ส่วน}} \neq \text{diff เศษส่วน}$

Ex1. จงหา  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$

Ex2. จงหา  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[4]{x^2 + 16}$



Ex3. จงหา  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$

Ex4. จงหา  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1}$

Ex5. จงหา  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2}$

Ex6. จงหา  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{25-x^2} - 4}{x+3}$

Ex7. จงหา  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$

Ex8. จงหา  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

Ex9. จงหา  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$  เมื่อ  $x > 0$

Ex10. จงหา  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan^2 x}{1 - \cos^2 x}$  มีค่าเท่าใด

Ex11. จงหา  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+3} - 1}{x + 2} + 8x + 5$

Ex12. จงหา  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{\sqrt{9+|x|}-3}$

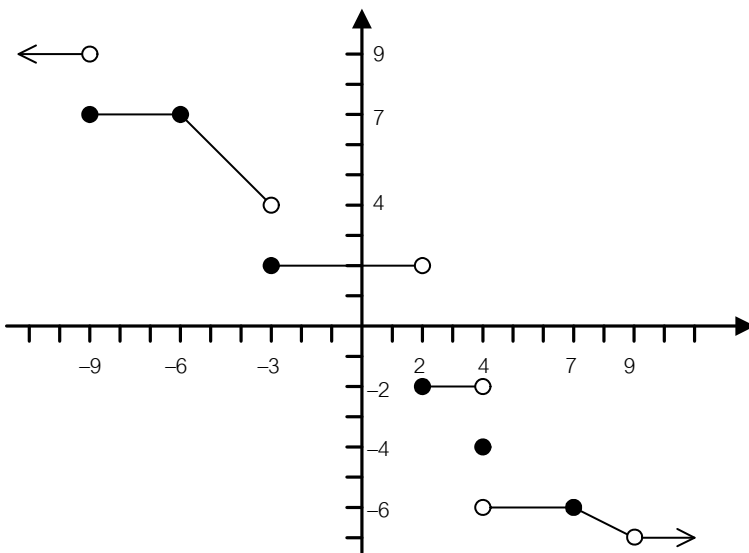
Ex13. จงหา  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x + 2^{3-x} - 6}{\sqrt{2^{-x}} - 2^{1-x}}$

Ex14. จงหา  $\lim_{x \rightarrow -3i} \frac{\sqrt{2ix+3} - ix}{ix-3}$

→ ความหมายของ

- (1)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$      $f(x)$  มีค่าประมาณเท่าไร    ถ้า  $x$  มีค่าใกล้ๆ  $a$  จะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ (ลิมิตซ้าย = ลิมิตขวา)
- (2)  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$      $f(x)$  มีค่าประมาณเท่าไร    ถ้า  $x$  มีค่าน้อยกว่า  $a$  อยู่นิดๆ (ลิมิตซ้าย)
- (3)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$      $f(x)$  มีค่าประมาณเท่าไร    ถ้า  $x$  มีค่ามากกว่า  $a$  อยู่หน่อยๆ (ลิมิตขวา)
- (4)  $f(a)$      $f(x)$  มีค่าเท่ากับเท่าไร    ถ้า  $x$  มีค่าเท่ากับ  $a$   
 เวลาหาค่า  $f(a)$  ให้แทน  $x = a$  ลงใน  $f(x)$  ทั้งนี้ ห้ามเปลี่ยนแปลงรูปแบบ  $f(x)$

Ex1. จากกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้จงหาค่า



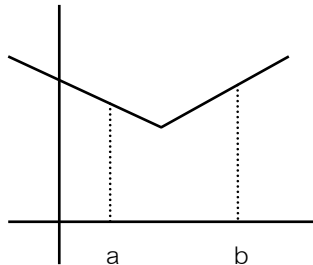
- (1)  $\lim_{x \rightarrow -9^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- (2)  $\lim_{x \rightarrow -9^+} f(x) = \dots\dots\dots$
- (3)  $\lim_{x \rightarrow -9} f(x) = \dots\dots\dots$
- (4)  $f(-9) = \dots\dots\dots$
- (5)  $\lim_{x \rightarrow -6^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- (6)  $\lim_{x \rightarrow -6^+} f(x) = \dots\dots\dots$
- (7)  $\lim_{x \rightarrow -6} f(x) = \dots\dots\dots$
- (8)  $f(-6) = \dots\dots\dots$
- (9)  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- (10)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \dots\dots\dots$
- (11)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \dots\dots\dots$
- (12)  $f(-3) = \dots\dots\dots$
- (13)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- (14)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots\dots\dots$
- (15)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots\dots\dots$
- (16)  $f(2) = \dots\dots\dots$
- (17)  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- (18)  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \dots\dots\dots$
- (19)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \dots\dots\dots$
- (20)  $f(4) = \dots\dots\dots$
- (21)  $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- (22)  $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = \dots\dots\dots$
- (23)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \dots\dots\dots$
- (24)  $f(7) = \dots\dots\dots$
- (25)  $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- (26)  $\lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) = \dots\dots\dots$
- (27)  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \dots\dots\dots$
- (28)  $f(9) = \dots\dots\dots$

● ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

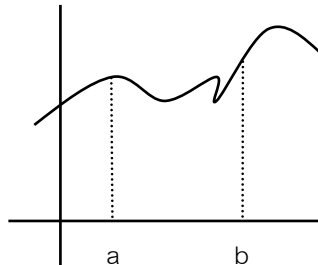
แบบที่ 1. ความต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$

ฟังก์ชันจะมีความต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$  ก็ต่อเมื่อ

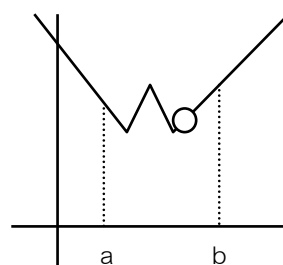
สามารถวาดกราฟของฟังก์ชันนั้นผ่านช่วง  $[a, b]$  ได้โดยไม่ต้องยกปากกา



(A)



(B)

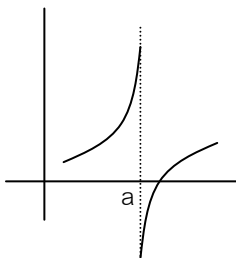


(C)

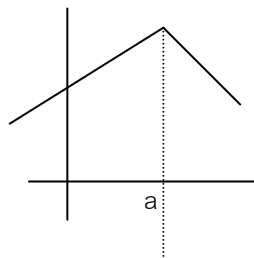
แบบที่ 2. ความต่อเนื่องที่จุดใดๆ

ฟังก์ชันจะมีความต่อเนื่องที่จุด  $x = a$  ก็ต่อเมื่อ

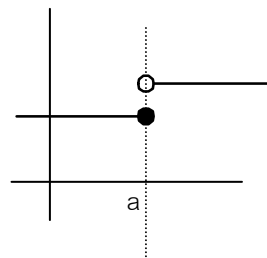
สามารถวาดกราฟของฟังก์ชันนั้นผ่านจุด  $x = a$  ได้โดยไม่ต้องยกปากกา



(A)



(B)



(C)

→ นิยาม  $f$  จะต่อเนื่องที่จุด  $x = a$  ก็ต่อเมื่อ

- (1)  $f(a)$             หาค่าได้
- (2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$     หาค่าได้    (ลิมิตซ้าย = ลิมิตขวา)
- (3) (1) = (2)

→ ข้อควรระวัง            วิธีการหาค่า  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  กับ  $f(a)$  ไม่เหมือนกัน

เช่น กำหนดให้  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  จงหาค่าของ  $f(2)$  และ  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Ex1. กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{เมื่อ } 0 \leq x < 1 \\ 4 & \text{เมื่อ } x = 1 \\ 5 - 3x & \text{เมื่อ } 1 < x \leq 2 \end{cases}$  จงหาค่า  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Ex2.  $f(x) = \frac{|x^2 - 9|}{x - 3}$  จงหาค่า  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

Ex3.  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{25 - x^2} - 3}{x - 4} & ; \text{ เมื่อ } x > 4 \\ x - 8 & ; \text{ เมื่อ } x \leq 4 \end{cases}$  จงตรวจสอบว่า  $f$  ต่อเนื่องที่จุด  $x = 4$  หรือไม่

Ex4. 
$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} & ; \text{เมื่อ } x \neq 2 \\ kx + 1 & ; \text{เมื่อ } x = 2 \end{cases}$$
 ถ้า  $g$  ต่อเนื่องที่  $x = 2$  แล้วค่า  $k$  มีค่าเท่าใด

Ex5. กำหนดให้ 
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{เมื่อ } x < -1 \\ x + a & \text{เมื่อ } -1 \leq x < 3 \\ 3x + b & \text{เมื่อ } x \geq 3 \end{cases}$$
 ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = -1$  และ  $x = 3$   
แล้ว  $a+b$  มีค่าเท่าไร

Ex6. กำหนดให้ 
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ ax + b & \text{เมื่อ } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x+8} & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$$
 ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกๆค่า  $x$  แล้ว  $a-b$  มีค่าเท่าไร

- ข้อสอบ PAT1 ( 5 ครั้งล่าสุด ) ออกทุกครั้ง !!!

1. กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่งสอดคล้องกับ  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|5x+1| - |5x-1|}{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}} = 80$

ค่าของ  $a^2 + a + 58$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (ครั้งที่ 15. มี.ค.58) (ตอบ 4)

1. 64                                      2. 78                                      3. 130                                      4. 330

2. กำหนดให้  $f$  เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามโดย  $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + 2a & , x < 0 \\ a + b & , x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+bx+5x^2} - 1}{x} & , x > 0 \end{cases}$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง

ถ้าฟังก์ชัน  $f$  มีความต่อเนื่องที่  $x = 0$  แล้วค่าของ  $15a + 30b$  เท่ากับเท่าใด (ครั้งที่ 15. มี.ค.58) (ตอบ 15)



3. ค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \left( 1 - \frac{2x^3}{x^2+1} \right)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (ครั้งที่ 16. ต.ค. 58) (ตอบ 1)

1. 0
2. 0.5
3. 1
4. 2
5. 4

4. กำหนดให้ฟังก์ชัน  $f(x) = \begin{cases} x^3 & , x < -1 \\ ax+b & , -1 \leq x < 1 \\ 3x^2+2 & , x \geq 1 \end{cases}$  เมื่อ  $a, b$  เป็นจำนวนจริง

ถ้าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่อง สำหรับทุกจำนวนจริง  $x$  แล้วค่า  $\int_{-2}^2 f(x)dx$  เท่ากับเท่าใด (ครั้งที่ 16. ต.ค. 58) (ตอบ 9.25)

5. ให้  $f$  เป็นฟังก์ชัน โดยที่  $f(x) = \begin{cases} x+b-4 & , x \leq a \\ x^2+bx+a & , a < x \leq b \\ 2bx-a & , x > b \end{cases}$

เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง และ  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง  
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก)  $(f \circ f)(a-b) = a-b$

(ข)  $f(a+b) = f(a) - f(b)$

(ค)  $f'(f(2)) = f'(2)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (ครั้งที่ 17. มี.ค.59) (ตอบ 1)

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

6. ค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{2 - \sqrt[3]{x^2 + 4}}$  เท่ากับเท่าใด (ครั้งที่ 17. มี.ค.59) (ตอบ 9)

7. ค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x + 2^{2-x} - 5}{\frac{x}{2^2 - 2^{1-x}}}$  เท่ากับเท่าใด ( ครั้งที่ 18. ต.ค.59 ) ( ตอบ 12 )

8. ค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x \cdot x - 3^{x+1}}{\sqrt[3]{x-2} - 1}$  เท่ากับเท่าใด ( ครั้งที่ 19. มี.ค.60 ) ( ตอบ 81 )

9. กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนจริง และ

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 5} & , x \geq a \\ \frac{15}{\sqrt{x^2 + 5}} & , x < a \end{cases}$$

ถ้าฟังก์ชัน  $f$  มีความต่อเนื่องทุกจำนวนจริง  $x$  แล้วค่าของ  $f(a) + f(-a)$  เท่ากับข้อใด ( ครั้งที่ 19. มี.ค.60 ) ( ตอบ 10 )