# Mathematic

# Mind

# Mapping

## เอกสารสรุปสูตรคณิตศาสตร์
## สำหรับน้องๆที่สอบ PAT 1+สอบตรงต่างๆ

**Created by P'1**

**Tel. 085-999-9449**

# คำนำ

" Mathematic Mind Mapping " เป็น**<u>อุปกรณ์</u>**ที่สำคัญมากในการเรียน**<u>คอร์สตะลุยโจทย์</u>**ที่ P'1 จะสอนในทุกๆ เทอม 2 ซึ่งกว่าจะทำเสร็จ P'1 ต้องใช้เวลาและความตั้งใจมากๆ ( พิมพ์เองกับมือทุกตัวอักษร ดังนั้นถ้าไม่สวยหรือพิมพ์ผิดก็ขออภัยไว้ล่วงหน้า ☺ ) โดย P'1 หวังว่าจะมีประโยชน์ให้แก่นักเรียนที่ตั้งใจจะประสบความสำเร็จในการสอบต่อเข้ามหาวิทยาลัย ทั้ง admission กลาง หรือ สอบตรงต่างๆ ดังนั้นก่อนที่นักเรียนใช้เอกสารชุดนี้ P'1 จึงมีข้อแนะนำบางประการที่จะแจ้งให้ทราบดังนี้

- สูตรทั้งหมดที่จัดพิมพ์ในเอกสารชุดนี้**<u>เพียงพอ</u>**ต่อการทำข้อสอบ PAT 1 และสอบตรงต่างๆ แน่นอน ซึ่ง P'1 ยึดเอาหลักสูตรกระทรวงศึกษาธิการครั้งล่าสุด ( ปี พ.ศ.2544 ) โดยนักเรียนบางคนอาจเคยจำได้เยอะกว่าที่จัดพิมพ์ซึ่งเป็นการจำที่**<u>มากเกินไป</u>**สำหรับการสอบ PAT 1 และสอบตรงต่างๆ แน่นอน
- ภาษาที่ใช้ในเอกสารเป็นภาษาส่วนตัวที่ P'1 ใช้ในการสอนในห้องเรียน
  ( นักเรียนที่ไม่เคยเรียนกับ P'1 อาจงงบ้างเล็กน้อย )
- การสรุปสูตรทั้งหมด หรือ จำนวนครั้งที่แต่ละสูตรเคยออกสอบ P'1 ยึดตามฐานข้อมูล ( Data base ) ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2537 จนถึงปัจจุบัน

สุดท้ายนี้หากเอกสารชุดนี้สามารถสร้างประโยชน์กับนักเรียนที่ได้อ่าน หรือช่วยในการฝึกทำข้อสอบเก่า ( สำคัญมากๆ ) ความดีทั้งหมดที่เกิดขึ้น P'1 ขออุทิศให้น้องๆเหล่านั้นจงประสบความสำเร็จในการสอบเข้ามหาวิทยาลัยได้เข้าเรียนในคณะ และมหาวิทยาลัยที่ตนเองต้องการด้วยเทอญ สาธุ สาธุ .... ☺

ด้วยความปรารถนาดีอย่างจริงใจ

วีรพล ปัญญาวิสุทธิกุล ( P'1 )

## บทที่ 1. เซต Created by P'1 NISIT TUTOR <Tel. 085 – 999 – 9449>

- **เรื่องทั่ว ๆไปเกี่ยวกับเซตที่ควรรู้**

→ เซตเป็น<u>**อนิยาม**</u>ใช้แทนกลุ่มอะไรก็ได้ที่ชี้เฉพาะเจาะจงได้

เช่น เซตในวันในหนึ่งสัปดาห์ , เซตของจำนวนเต็มบวกที่ $< 5$

ห้ามใช้!! เซตของคนหล่อ , เซตของผลไม้อร่อย

→ จำนวนสมาชิกของเซต A แทนด้วย n(A)

โดยที่สมาชิกซ้ำกันนับเป็นตัวเดียวนะครับ ☺

→ เซตอนันต์ คือ เซตที่ไม่สามารถบอกจำนวนสมาชิกได้

→ เซตจำกัด คือ เซตที่สามารถบอกจำนวนสมาชิกได้

→ เซตที่ไม่มีสมาชิก เรียกว่า เซตว่างเขียนแทนด้วย $\phi$ , { }

( เซตว่างเป็นเซตจำกัด และ เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต )

→ เป็นสมาชิก $\in$ ( ดูทั้งก้อน ) , เป็นสับเซต $\subset$ ( ดูข้างใน )

$\{1,\{1\}\} \in \{1,\{1\},\{1,\{1\}\}\}$

$\{1,\{1\}\} \subset \{1,\{1\},\{1,\{1\}\}\}$

→ จำนวนสับเซตของ A = $2^n$ เมื่อ n คือจำนวนสมาชิกของ A

- **เพาเวอร์เซต** เขียนแทนด้วย P(A)

P(A) คือ เซตของสับเซต ( 4 พยางค์นะจำให้แม่น )

P(A) = { สับเซต$_1$ , สับเซต$_2$ , ... , สับเซต $_{2^n}$ }

P(A) = { $\phi$, สับเซต$_2$ , ... , A } ; $\phi$ = พระเอก , A = นางเอก

สิ่งที่ควรรู้ (1) ถ้า n(A) = m จะได้ $n[P(A)] = 2^m$

(2) ถ้า $A = \phi$ แล้ว $P(A) = \{\phi\}$ (3) $P(A) \neq \phi$

(4) $\phi, A \in P(A)$ (5) $P(A)\cup P(B) \subset P(A\cup B)$

(6)* $P(A)\cap P(B) = P(A\cap B)$

- **โจทย์ปัญหาการหาจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด**

→ 2 เซต $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

→ 3 เซต $n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B)$

" ใช้เมื่อรู้ 7 จาก 8 " $- n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)$

สูตร 3 เซตท่องว่า *" เซต 1 – เซต 2 + เซต 3 "* By โรเจอร์ เฟดเดอเรอร์

- **การกระทำระหว่างเซต** ( Operation of Set )

(1) สมบัติที่ควรทราบ

สลับที่ $A\cap B = B\cap A$ , $A\cup B = B\cup A$

มั่วซั่ว( สลับที่) $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$ , $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$

แจกแจง $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ , $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

กระทำกับตัวเอง $A\cap A = A$ , $A\cap\phi = \phi$ , $A\cap\mathscr{U} = A$

$A\cup A = A$ , $A\cup\phi = A$ , $A\cup\mathscr{U} = \mathscr{U}$

| SA–RUP เล็ก∩ใหญ่ = เล็ก , เล็ก∪ใหญ่ = ใหญ่ |
|---|

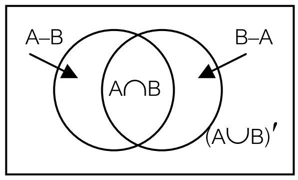
อันนี้เลยต้องรู้เองว่า $A\cap(A\cup B) = A$ , $A\cup(A\cap B) = A\cap B$ , ... ฯลฯ

คอมพลีเมนต์ $(A')' = A$ , $\phi' = \mathscr{U}$ , $\mathscr{U}' = \phi$ , $A\cap A' = \phi$ , $A\cup A' = \mathscr{U}$

เดอ–มอ–แกงค์ ( De' morgain ) $(A\cup B)' = A'\cap B'$ , $(A\cap B)' = A'\cup B'$

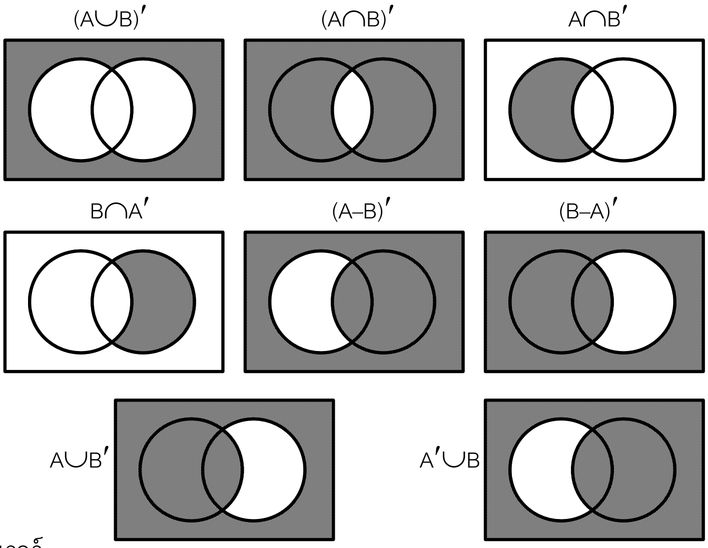
ผลต่าง ( สำคัญสุด ) $\boxed{A - B = A\cap B' \text{ อ่านว่า } \textit{" อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B"}}$

(2) แผนภาพเวนน์ออยเลอร์ที่ควรรู้

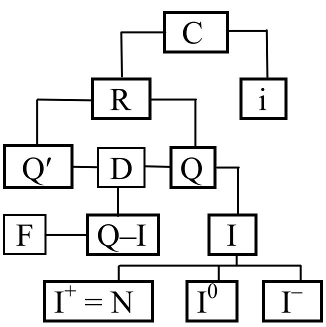



อย่าลืมว่า ∪ คือ หรือ

∩ คือ และ (แต่)




## บทที่ 2. ระบบจำนวนจริง Created by P'1 NISIT TUTOR <Tel. 085 – 999 – 9449>




C ( Complex Nu. ) = จำนวนเชิงซ้อน , i ( Imaginary Nu. ) = จำนวนจินตภาพ ( $i = \sqrt{-1}$ , $i^2 = -1$ )

R ( Real Nu. ) = จำนวนจริง คือ จำนวนทุกตัวเว้น 1. เศษส่วนที่ ส่วนเป็น 0 2. ในรากคู่ติดลบ

Q ( Rational Nu. ) = จำนวนตรรกยะ = *" เศษส่วนของจำนวนเต็ม "*

Q′( Irrational Nu. ) = จำนวนอตรรกยะ = ทศนิยม 2 ไม่ ( ไม่รู้จบแบบไม่ซ้ำ ) ( log , รูทที่ไม่ลงตัว , $\pi$ , e ,ฯลฯ )

Q–I = จำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม มี 2 ประเภท คือ เศษส่วน และ ทศนิยมธรรมดา

D ( Decimal ) = ทศนิยม
- ทศนิยมปกติ → Q ( ตรกกยะ )
- ทศนิยม 2 ไม่ → Q′( อตรกกยะ )

- **สรุปว่า!!** *" ทศนิยมเป็นได้ทั้งตรรกยะและอตรรกยะ"*

I ( Integer ) = จำนวนเต็ม , N ( Counting Nu. ) = จำนวนนับ ( $N = I^+$ ) , F ( Fraction ) = เศษส่วน

- **สมบัติของระบบจำนวนจริงที่ควรทราบ**

(1) สมบัติปิด → " ทำแล้วได้**<u>พวกเดิม</u>** "

เช่น $\mathrm{I}^+$ มีสมบัติปิดการคูณ เพราะ $\mathrm{I}^+ \times \mathrm{I}^+ \in \mathrm{I}^+$

$\mathrm{I}^-$ ไม่มีสมบัติปิดการคูณ เพราะ $\mathrm{I}^- \times \mathrm{I}^- \in \mathrm{I}^+$

(2) สมบัติการมีเอกลักษณ์ → " ทำแล้วได้**<u>ตัวเดิม</u>** "

เช่น 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก เพราะ $0 + a = a$

1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ เพราะ $1 \times a = a$

ถ้า e เป็นเอกลักษณ์สำหรับ$*$ จะได้ว่า $\boxed{a * e = a = e * a}$

(3) สมบัติการมีอินเวอร์ส → " ทำแล้วได้เอกลักษณ์ "

เช่น $-2$ เป็นอินเวอร์สการบวกของ 2 เพราะ $-2 + 2 = 0$

1/2 เป็นอินเวอร์สการคูณของ 2 เพราะ $1/2 \times 2 = 1$

- **การแก้สมการพหุนามตัวแปรเดียว**

(1) สมการกำลัง 1 เช่น $2x+1 = 0$ ( ต้องทำเองได้! ☹ )

(2) สมการกำลัง 2 แยก factor , ใช้สูตร $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(3) สมการกำลัง $> 2$ จับคู่ดึงตัวร่วม , หารสังเคราะห์

Tip **หารสังเคราะห์**

(1) ถ้าผลรวมสัมประสิทธิ์ = 0 → " 1 ใช้ได้ "

(2) ถ้าผลรวมสัมประสิทธิ์สลับกันเท่ากัน → " $-1$ ใช้ได้ "

- **การแก้อสมการพหุนามตัวแปรเดียว**

(1) อสมการกำลัง 1 " ระวังเมื่อนำจำนวนลบไป $\times , \div$ ฝั่งตรงข้ามต้องเปลี่ยนเครื่องหมายอสมการเป็นตรงข้าม "

(2) อสมการกำลัง 2 , อสมการกำลัง $> 2$

– ถ้าหน้าตัวแปรใดเป็นลบ ให้นำ $-1$ คูณตลอด และอย่าลืม ! เปลี่ยนเครื่องหมายอสมการเป็นตรงข้าม

– จับทุก factor $= 0$ แก้สมการหาค่าวิกฤต แล้วปักบนเส้นจำนวน

– ใส่เครื่องหมาย + และ – สลับกันในแต่ละช่วง โดยเริ่มจากด้านขวามือ

– ดูเครื่องหมาย**<u>สุดท้าย</u>**ของอสมการ

ถ้า $>, \geq$ เอาช่วง + , ถ้า $<, \leq$ เอาช่วง –

โดยที่ $>, <$ เป็นช่วงเปิด ( วงกลวง ) , $\geq , \leq$ เป็นช่วงปิด ( วงทึบ )

– ถ้าแยก factor **<u>ไม่ได้</u>**พยายามจัดรูปกำลังสองสมบูรณ์แล้ววิคราะห์เอง

(3) อสมการเศษส่วนพหุนาม ( **เน้น สุดๆ !!!** มีตัวแปรห้ามคูณไขว้ )

– ทำให้ขวามือเป็น 0 โดยการย้ายมาลบกับด้านซ้ายมือ

– จัดรูปแยกตัวประกอบทั้งเศษและส่วน

– ถ้าหน้าตัวแปรใดเป็นลบ ให้นำ $-1$ คูณตลอด และอย่าลืม ! เปลี่ยนเครื่องหมายอสมการเป็นตรงข้าม

– จับทุก factor = 0 แก้สมการหาค่าวิกฤต โดยพิจารณาดังนี้

ถ้ามีวงเล็บซ้ำดีกรีคู่ → ปัก 2 จุด ถ้ามีวงเล็บซ้ำดีกรีคี่ → ปัก 1 จุด

ระวัง !! ค่าวิกฤตที่ทำให้ส่วนเป็น 0 ( อย่าลืมยกเว้นนะจ๊ะ )

– พิจารณาช่วงคำตอบของอสมการเหมือนอสมการพหุนามตามปกติ

- **ทฤษฎีบทเศษเหลือ**

> *" ถ้าหารพหุนาม P( x ) ด้วยพหุนาม ( ax – b ) แล้วเศษที่ได้จากการหารดังกล่าวจะเท่ากับ P( b/a ) เมื่อ a,b ∈ R "*

→ หรือ Jum! ง่ายๆ ดังนี้ (1) จับตัวหาร = 0 แก้สมการหาค่า x

(2) นำค่า x ที่ได้แทนลงในตัวตั้ง ผลลัพธ์ที่ได้คือเศษที่เหลือจากการหาร [ เศษ = P(b/a) ] อาจใช้การหารสังเคราะห์เข้าช่วยได้

(3) ถ้าผลลัพธ์ = 0แปลว่า**<u>หารลงตัว</u>** , ตัวหารเป็น**<u>ตัวประกอบ</u>**ของตัวตั้ง

- **นิยามค่าสัมบูรณ์ , การถอดค่าสัมบูรณ์ ( หลักการแก้ผ้าค่าสัมบูรณ์ )**

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}}$$

*" ถ้าข้างในแอ๊ปเป็นบวก ถอดได้เลย , แต่ถ้าข้างในแอ๊ปเป็นลบ ถอดได้ลบของตัวข้างใน "*

(1) $|xy| = ?$ ถ้า $x < 0 , y > 0$ **<u>ตอบ</u>** $-xy$ ( เพราะข้างในเป็น – )

(2) $|4-y^2| = ?$ ถ้า $y > 2$ **<u>ตอบ</u>** $-(4-y^2)$ ( เพราะข้างในเป็น – )

(3) $|x-(y+2z)| = ?$ ถ้า $x > y+2Z$ **<u>ตอบ</u>** $x-(y+2z)$ ( เพราะข้างในเป็น + )

- **สมบัติของค่าสัมบูรณ์ที่ควรทราบ**

(1) $|a| \geq 0$ (2) $|a| = |-a|$ ( เช่น $|4-x| = |x-4|$ )

(3) $|ab| = |a||b|$ (4) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} , b \neq 0$

(5) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (6) $|a-b| \geq |a| - |b|$

*แอ๊ปแจก ×,÷ ได้ แต่แจก +, – ไม่ได้*

(7) $\sqrt{a^2} = |a|$ , $(\sqrt{a})^2 = a$ ( เช่น $\sqrt{(y-2)^2} = |y-2|$ )

(8) $|a|^2 = a^2$ เช่น $|x-3|^2 = (x-3)^2$ *"แอ๊ปกำลังสองเหมือนวงเล็บกำลังสอง"*

- **การแก้สมการค่าสัมบูรณ์**

(1) รูปแบบปกติ

$|a| = b$ → ต้องตรวจคำตอบว่า $b \geq 0$

$|a| = |b|$ → ไม่ต้องตรวจคำตอบ

$a = \pm b$ ( $a = b$ or $a = -b$ )

**<u>Ex1</u>** $|x-2| = 3x+2$

$x-2 = 3x+2$ or $x-2 = -(3x+2)$

$-4 = 2x$ or $x-2 = -3x-2$

$x = -2$ or $x = 0$

( แต่!! $x = -2$ ใช้ไม่ได้เพราะ ทำให้ $3x-2 < 0$ )

**<u>Ex2</u>** $|2x-5| = |4-x|$

$2x-5 = 4-x$ or $2x-5 = -(4-x)$

$3x = 9$ or $2x-5 = -4+x$

$x = 3$ or $x = 1$

( ใช้ได้ทั้งสองตัว ไม่ต้องตรวจคำตอบเพราะเป็น + ทั้งสองฝั่ง )

(2) รูปแบบแยกกรณี ( ใช้เมื่อจัดรูปแล้วไม่เป็นรูปแบบปกติ )

– จัดรูปให้หน้าตัวแปรเป็นบวก ( $|2-x| = |x-2|$ )

– จับค่าสัมบูรณ์ทุกตัว = 0 เพื่อหาค่า x ( ค่าวิกฤต ) แล้วปักบนเส้นจำนวนเพื่อแยกกรณีคิด

– กำหนดเครื่องหมายในการถอดค่าสัมบูรณ์ดังนี้

2 กรณี ←  –  |  +  →

3 กรณี ←  (–)(–)  |  (+)(–)  |  (+)(+)  →

หาคำตอบทีละกรณีแล้วนำมารวม ( ∪ ) กัน

( สมการแอ๊ปแบบแยกกรณี ถ้าเจอส่วนใหญ่จะเป็น 3 กรณี )

● **การแก้อสมการค่าสัมบูรณ์**

(1) รูปแบบปกติ มี 3 รูปแบบ ดังนี้

1.1 $\boxed{\text{สูตรน้อยกว่า ถ้า } |a| < b \text{ จะได้ว่า } -b < a < b}$

เช่น $|2x-1| < x+2$ จะได้ว่า $-(x+2) < 2x-1 < x+2$

$-(x+2) < 2x-1 \cap 2x+1 < x+2$

( แยกทำ 2 ส่วนแล้วเอาคำตอบแต่ละส่วนมา $\cap$ กัน )

1.2 $\boxed{\text{สูตรมากกว่า ถ้า } |a| > b \text{ จะได้ว่า } a > b \text{ หรือ } a < -b}$

เช่น $|x+2| > 3x-1$ จะได้ว่า $x+2 > 3x-1 \cup x+2 < -(3x-1)$

( แยกทำ 2 ส่วนแล้วเอาคำตอบแต่ละส่วนมา $\cup$ กัน )

1.3 $\boxed{\text{สูตรแอ๊ป 2 ฝั่ง } |a| <,> |b| \text{ ใช้การยกกำลังสอง 2 ฝั่ง}}$

แล้วใช้สมบัติค่าสัมบูรณ์ที่ว่า $|a|^2 = a^2$

เช่น $|x-1| < |2x-1| \rightarrow |x-1|^2 < |2x-1|^2$

( แอ๊ปกำลัง 2 เหมือนวงเล็บกำลัง 2 ) $\rightarrow (x-1)^2 < (2x-1)^2$

$(x-1)^2 - (2x-1)^2 < 0 \leftarrow$ *"อย่ากระจายออกมาจะยาก ใช้สูตร*

$[(x-1)-(2x-1)]\,[(x-1)+(2x-1)] < 0$ *ผลต่างกำลังสองดีกว่า"*

$(x-1-2x+1)(x-1+2x-1) < 0 \rightarrow (-x)(3x-2) < 0$

$(x)(3x-2) > 0$ *"อย่าลืมทำหน้า x ให้เป็น + ก่อนปักบนเส้นจำนวน"*

(2) รูปแบบแยกกรณี

" ใช้เมื่อพยายามจัดรูปแบบโจทย์แล้วไม่สามารถเข้า Pattern รูปแบบปกติได้ ปล. สมการค่าสัมบูรณ์ P'1 ไม่มี ต.ย. ให้ดูก็คล้าย ตย. นี้ คือ ทำทีละกรณีแล้วค่อยนำคำตอบมา ( $\cup$ ) กัน "

ต.ย. เช่น $|x-1| + |2x+3| > 5$


กรณีที่ 1. $\mathscr{U} = x < -3/2$

$[-(x-1)]+[-(2x+3)] > 5$

$-x+1-2x-3 > 5$

$x < -7/3 \cap x < -3/2$

จะได้ $x < -7/3$

กรณีที่ 2. $\mathscr{U} = -3/2 \le x < 1$

$[-(x-1)]+(2x+3) > 5$

$-x+1+2x+3 > 5$

$x > 1 \cap -3/2 \le x < 1$

จะได้ $\phi$

กรณีที่ 3. $\mathscr{U} = x \ge 1$

$(x-1)+(2x+3) > 5$

$3x+2 > 5$

$x > 1 \cap x \ge 1$

จะได้ $x > 1$

แล้วนำคำตอบทั้ง 3 กรณีมารวมกัน หรือก็คือนำมา $\cup$ กันนั่นเอง แล้วจะได้คำตอบสุดท้าย คือ

$(-\infty,-7/3) \cup (1,\infty)$

● หมายเหตุ อย่าลืมนิยามค่าสัมบูรณ์ ( หลักการแก้ผ้าค่าสัมบูรณ์ )

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}}$$

*" ถ้าข้างในแอ๊ปเป็นบวก ถอดได้เลย , แต่ ถ้าข้างในแอ๊ปเป็นลบ ถอดได้ลบของตัวข้างใน "*

● **การหารลงตัว** ( Exact Division )

$a \mid b$ อ่านว่า " a หาร b ลงตัว "

หมายความว่า " $\frac{b}{a}$ ลงตัว" , $\frac{b}{a} = k$ , $b = ka$ , $k \in \mathbf{I} - \{0\}$"

● **การเปลี่ยนฐานในระบบตัวเลข** ( ยังไม่เคยออก PAT )

(1) ฐาน 10 $\rightarrow$ ฐานใดๆ " ตั้งหารสั้นแล้วไล่เขียนจากล่างขึ้นบน "

(2) ฐานใดๆ $\rightarrow$ ฐานสิบ " เขียนกระจายคูณด้วยค่าประจำหลัก หรือ ใช้การหารสังเคราะห์ "

● **จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์** ( Relatively prime numbers )

$\boxed{\text{" a , b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อ } (a,b) = 1 \text{ "}}$

เช่น 2 กับ 7 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ เพราะ $(2,7) = 1$

18 กับ 27 **ไม่**เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ เพราะ $(18,27) = 9$

4 กับ 9 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ เพราะ $(4,9) = 1$

JUM!! จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์**ไม่เกี่ยวกับ**จำนวนเฉพาะนะครับ

● **ขั้นตอนวิธีการหาร** ( Division Algorithm )

$\boxed{\text{ตัวตั้ง} = \text{ตัวหาร ( ผลลัพธ์ ) + เศษ}}$

$5 = 2(2)+1$ ถูกต้องนะคร๊าบ

$5 = 2(1)+3$ ผิดเพราะเศษ < ตัวหาร

$5 = 2(3)+(-1)$ ผิดเพราะเศษต้อง $\ge 0$

● **ตัวหารร่วมมาก** ( The Greatest common divisor : G.C.D )

(1) ห.ร.ม. $\in \mathbf{I}^+$

(2) ห.ร.ม. ของ a , b = d เขียนแทนด้วย $(a,b) = d$

(3) $(a,b) = (-a,b) = (a,-b) = (-a,-b)$

(4)* ถ้า $a \ne 0$ แล้ว $(0,a) = |a|$

$\boxed{\text{วิธีหา ห.ร.ม. (1) ตั้งหารสั้น (2) ใช้วิธียุคลิก}}$

เช่น จงหา ห.ร.ม. 595 กับ –252

จาก $\boxed{\text{ตัวตั้ง} = \text{ตัวหาร ( ผลลัพธ์ ) + เศษ}}$

$595 = 252(2)+91$

$252 = 91(2)+70$

$91 = 70(1)+21$

$70 = 21(3)+7$

$21 = \underline{7}(3)+0$

$\rightarrow$ **ห**.ร.ม. = ตัว**หาร**ตัวสุดท้าย $(595,-252) = 7$

$\rightarrow$ 7 ยังเป็น หรม. ของทุกคู่หน้าอีกด้วย $(595,252) = (252,91) = (91,70) = (70,21) = (21,7) = 7$

● **ตัวคูณร่วมน้อย** ( The Least common multiple : L.C.M )

(1) ค.ร.น. $\in \mathbf{I}^+$

(2) ค.ร.น. ของ a , b = k เขียนแทนด้วย $[a,b] = k$

(3) $[a,b] = [-a,b] = [a,-b] = [-a,-b]$

(4)* $[0,a]$ หาค่าไม่ได้

$\boxed{\text{วิธีหา ค.ร.น. (1) ตั้งหารสั้น (2) ใช้สูตร } ab = dk \,;\, a,b \in \mathbf{I}^+}$

## บทที่ 3. ตรรกศาสตร์ Created by P'1 NISIT TUTOR <Tel. 085 – 999 – 9449>

- **ตารางค่าความจริงของ** $p \wedge q$ , $p \vee q$ , $p \rightarrow q$ , $p \leftrightarrow q$

| p | q | ~p | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T | F | F |
| F | T | T | F | T | T | F |
| F | F | T | F | F | T | T |

$p \wedge q$ F ตัวเดียว F ทันที , $p \vee q$ T ตัวเดียว T ทันที

$p \rightarrow q$ หน้า T หลัง F ตอบ F ที่เหลือจริงหมด

$p \leftrightarrow q$ เหมือนกันตอบ T ต่างกันตอบ F

- **สมมูลที่ควรจำ** ( นร.อาจเคยจำมาเยอะกว่านี้แต่แค่นี้พอ!! )

(1) สมบัติการสลับที่ ($\rightarrow$ ไม่มีสมบัติสลับที่ นะครับ ☺ )

$p \wedge q \equiv q \wedge p$ , $p \vee q \equiv q \vee p$ , $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$

(2) สมบัติการ " มั่วซั่ว " ($\rightarrow$ ก็ไม่มีสมบัติมั่วซั่ว นะครับ ☺ )

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge q \wedge r$

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \equiv p \vee q \vee r$

$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$

(3) สมบัติการแจกแจง ( ต้องทำย้อนกลับ (ดึงตัวร่วม) ให้ได้ด้วย )

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ , $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(4) เดอ–มอ–แกงค์ ( De' morgain )

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ , $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

(5)* ถ้า ... แล้ว..... มี 2 สมมูลนะครับ ( ใช้บ่อยสุดๆ ) ☺

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

(6) ...... ก็ต่อเมื่อ .... ก็มี 2 สูตรนะครับ

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ , $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$

(7) สมบัติการจิ้ม ( จิ้มหน้าเครื่องหมายเดิม,จิ้มหลังเครื่องหมายเปลี่ยน )

$p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ , $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

$(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ , $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

- **สัจจนิรันดร์** ( Tautology ) คือ ประพจน์ที่เป็น T ทุกกรณี โดยมีวิธีการตรวจสอบประพจน์ว่าเป็นสัจจนิรันดร์หรือไม่ดังนี้

– สมมติให้ประพจน์ที่จะนำมาตรวจสอบมีค่าความจริงเป็น "เท็จ"

– เริ่มหาค่าความจริงของประพจน์ย่อยถ้าขัดแย้ง เป็น Tautology

– แต่ถ้าตัวเชื่อมหลักเป็น $\leftrightarrow$ ให้ใช้สมมูลเข้าช่วย กล่าวคือ

ถ้า ≡ กันเป็น Tau , ถ้า ไม่ ≡ ก็ไม่เป็น tau

- **การอ้างเหตุผล** ( Argument )

ขัด → Tau → สม    ไม่ขัด → ไม่ tau → ไม่สม

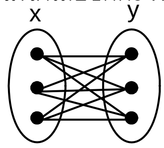
- **การหาค่าความจริงของประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณ** (Quantifier)

(1) $\forall x[P(x)] \equiv T$ เมื่อใช้ได้ทุก x , $\equiv F$ เมื่อมีบาง x ใช้ไม่ได้

(2) $\exists x[P(x)] \equiv T$ เมื่อมีบาง x ใช้ได้ , $\equiv F$ เมื่อใช้ไม่ได้เลยซักกะ x

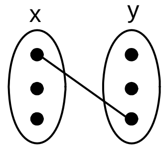
(3) $\forall x \forall y[P(x,y)] \equiv T$ ( ส่วนมากจะเท็จ )

*" ทุก x ต้องใช้ได้ทุก y "* , ต้องเป็นดังรูปเท่านั้นถึง T



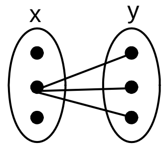

(4) $\exists x \exists y[P(x,y)] \equiv T$ ( ส่วนมากจะจริง )

*" คู่เดียวก็หรูแล้ว "* , มีบาง x ใช้ได้บาง y



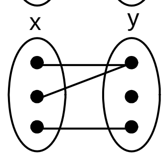

(5) $\exists x \forall y[P(x,y)] \equiv T$ ( มีบาง x ใช้ได้ทุก y )

*" x ตอแหล "* , อาจเป็น x อื่นไม่เหมือนกับรูปก็ได้




(6) $\forall x \exists y[P(x,y)] \equiv T$ ( ทุก x ต้องมีบาง y ใช้ได้ )

*" ทุก x ตัวต้องมีคู่ "* x ทุกตัวจะรุม y ตัวเดียวกันก็ได้




- **นิเสธและสมมูลของประโยคเปิด**

สามารถทำได้เหมือนกับนิเสธและสมมูลของประพจน์

เช่น $P(x) \rightarrow Q(x) \equiv \sim P(x) \vee Q(x) \equiv \sim Q(x) \rightarrow \sim P(x)$

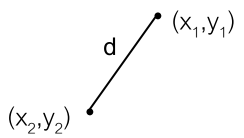
นิเสธของประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณ ( ต้องกระจาย 2 ทีนะจ๊ะ )

$\sim \forall x[P(x)] \equiv \exists x[\sim P(x)]$ , $\sim \exists x[\sim P(x)] \equiv \forall x[P(x)]$

## บทที่ 4. เรขาคณิตวิเคราะห์ Created by P'1 NISIT TUTOR <Tel. 085–999–9449>

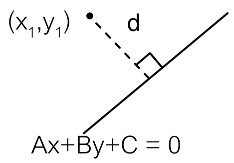
- **สูตรพื้นฐานที่ควรทราบ** ( น้องๆอาจเคยจำมามากกว่านี้ แต่เชื่อ P'1 เถอะ แค่นี้ก็หรูแล้ว )

(1) จุด – จุด



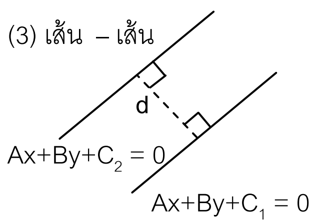

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(2) จุด – เส้น



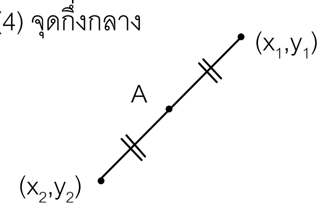

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(3) เส้น – เส้น




$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(4) จุดกึ่งกลาง

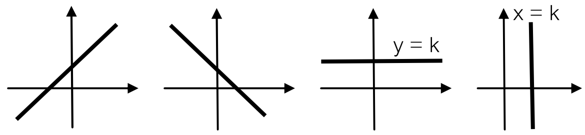



$$A = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

## กราฟเส้นตรง

→ สมการทั่วไป $\boxed{Ax+By+C = 0}$ ความชัน (m) $= -\dfrac{A}{B}$ , $\dfrac{-\text{หน้า}x}{\text{หน้า}y}$

- สมการมาตรฐาน $\boxed{y = mx+c}$ ความชัน (m) มี 3 สูตร คือ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ , $f'(x)$ , $\tan\theta$ ( $\theta$ คือมุมที่เส้นตรงทำกับแกน x ในทิศทวนเข็ม )




m เป็น + m เป็น – m เป็น 0 m เป็น $\infty$

*" เส้นตรง 2 เส้นขนานกัน เมื่อความชันเท่ากัน ( $m_1 = m_2$ ) "*

*" เส้นตรง 2 เส้นตั้งฉากกันเมื่อความชันคูณกันเป็น –1 ( $m_1 \cdot m_2 = -1$ ) "*

- หลักการหาสมการเส้นตรง

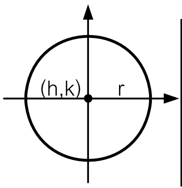
(1) รู้จุด ( รู้พิกัดจุด 1 จุดที่เส้นตรงผ่าน )

(2) รู้ความชัน ( รู้ความชันของเส้นตรงจาก 3 วิธี )

(3) เข้าสูตร ( $y-y_1 = m(x-x_1)$ , $(x_1,y_1)$ คือจุดที่เส้นตรงผ่าน )

## กราฟวงกลม

- สมการทั่วไป $\boxed{x^2+y^2+ax+by+c = 0}$ ( ใช้เมื่อผ่าน 3 จุด )
- สมการมาตรฐาน $\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2}$ ( h,k) = จศก. r = รัศมี




- หลักการหาสมการวงกลม

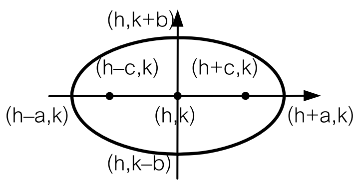
(1) รู้จุดศูนย์กลาง ( h,k ) , (2) รู้ r ( รัศมี )

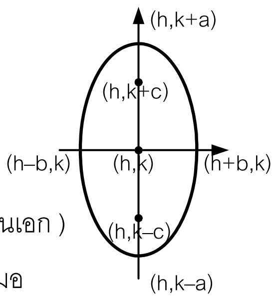
(3) เข้าสูตร ( สมการมาตรฐาน )

## กราฟวงรี ( ใต้แกนไหนมากกว่ารีตามแกนนั้น )

- สมการมาตรฐาน

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \qquad \boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2} = 1}$$




(1)* นิยาม $|PF_1+PF_2| = 2a$ ( แกนเอก )

(2) แกนโท = 2b และ a > b เสมอ

(3) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด ( h,k ) เสมอ

(3) c คือ ระยะจากจศก. ถึง จุดโฟกัส $= \sqrt{a^2-b^2}$

(4) จศก. , จุดยอด , จุดโฟกัส อยู่บนแกนเอกเสมอ

(5) ความเยื้องศูนย์กลาง ( e ) = c/a ( ยังไม่เคยออก Ent )

(6) ความกว้างวงรี ณ โฟกัส ( ลาตัสเรกตัม ) = $|2b^2/a|$

- หลักการหาสมการวงรี

(1) รู้จุดศูนย์กลาง ( h,k )

(2) รู้ a , b ( ครึ่งแกนเอก , ครึ่งแกนโท )

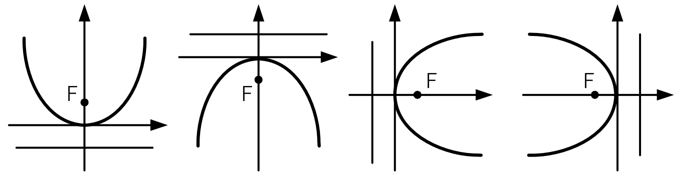
(3) เข้าสูตร ( สมการมาตรฐาน , ดูให้ดีว่ารีตามแกนอะไร )

## กราฟพาราโบลา ( พาราโบลาจะครอบแกนกำลังหนึ่งเสมอ )

- สมการทั่วไป $\boxed{x^2+ax+by+c = 0 , y^2+ay+bx+c = 0}$ ( ใช้เมื่อผ่าน 3 จุด )
- สมการมาตรฐาน

$\boxed{(x-h)^2 = 4c(y-k)}$ $\boxed{(y-k)^2 = 4c(x-h)}$

C > 0 C < 0 C > 0 C < 0




(1) * นิยาม "ห่างจุด ( โฟกัส ) = ห่างเส้น ( ไดเรกตริกซ์ ) "

(2) จุดยอดอยู่ที่พิกัด ( h,k ) และ จุดโฟกัสจะห่างจากจุดยอด $|c|$ เสมอ

(3) เส้นไดเรกตริกซ์ ( เส้นบังคับ ) ก็จะห่างจากจุดยอด $|c|$ เสมอ

(4) ความกว้างพาราโบลา ณ โฟกัส ( ลาตัสเรกตัม ) = $|4c|$

- หลักการหาสมการพาราโบลา

(1) รู้จุดยอด ( h,k )

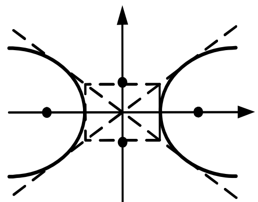
(2) รู้ C ( จุดยอด ถึง จุดโฟกัส หรือ จุดยอด ถึง เส้นไดเรกตริกซ์ )

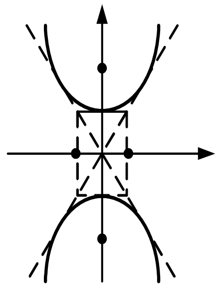
(3) เข้าสูตร ( สมการมาตรฐาน , ดูให้ดีว่าครอบแกนอะไร )

## กราฟไฮเปอร์โบลา ( แกนไหนมาก่อน hyper ครอบแกนนั้น )

- สมการมาตรฐาน

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \qquad \boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2} = 1}$$





(1)* นิยาม $|PF_1-PF_2| = 2a$ ( แกนตามขวาง )

(2) แกนสังยุค = 2b **แต่** a >, < b ก็ได้ !!

(3) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด ( h,k ) เสมอ

(3) c คือ ระยะจากจศก. ถึง จุดโฟกัส $= \sqrt{a^2+b^2}$

(4) จศก. , จุดยอด , จุดโฟกัส อยู่บนแกนเอกเสมอ

(5) สมการเส้นกำกับกราฟ = สมการเส้นตรง ( อย่าจำสูตรลัด !! )

(6) ความกว้างไฮเปอร์ ณ โฟกัส ( ลาตัสเรกตัม ) = $|2b^2/a|$

- หลักการหาสมการไฮเปอร์โบลา

(1) รู้จุดศูนย์กลาง ( h,k )

(2) รู้ a , b ( ครึ่งแกนตามขวาง , ครึ่งแกนสังยุค )

(3) เข้าสูตร ( สมการมาตรฐาน , ดูให้ดีว่าครอบแกนอะไร )

# บทที่ 5. ฟังก์ชัน Created by P'1 NISIT TUTOR <Tel. 085 – 999 – 9449>

### ผลคูณคาร์ทีเซียน ( $A \times B$ )

คือ **<u>เซตของคู่อันดับ</u>**ที่ตัวหน้ามาจาก A และตัวหลังมาจาก B

### ความสัมพันธ์ ( $r : A \rightarrow B$ ) คือ **<u>สับเซต</u>**ของผลคูณคาร์ทีเซียน

$n(A) = m$ , $n(B) = n$

$\downarrow$

$n(A \times B) = mn$

$\downarrow$

$A \times B$ มี $2^{mn}$ สับเซต $\rightarrow$ $r : A \rightarrow B \leftrightarrow r \subset A \times B$ "1 สับเซต = 1 ความสัมพันธ์"

$\downarrow$

$n( r : A \rightarrow B ) = 2^{mn}$ $\rightarrow$ f คือ r ที่โดเมนไม่ซ้ำ

$\downarrow$

$f \subset r$

$\downarrow$

$f : A \rightarrow B \leftrightarrow D_f = A \; , \; R_f \subset B$

$f : A \xrightarrow{\text{onto}} B \leftrightarrow D_f = A \; , \; R_f = B$

### การหาโดเมน ( $D_r$ ) และ เรนจ์ ( $R_r$ )

- วิธีการหาโดเมน ( $D_r$ )

(1) ให้วาดกราฟ r แล้วดู projection **ของกราฟบนแกน** x

(2) ให้จัด **y ในเทอม** x แล้วดูค่า x ที่ทำให้ y เป็นจริง

- วิธีการหาเรนจ์ ( $R_r$ )

(1) ให้วาดกราฟ r แล้วดู projection **ของกราฟบนแกน** y

(2) ให้จัด **x ในเทอม** y แล้วดูค่า y ที่ทำให้ x เป็นจริง

### อินเวอร์สความสัมพันธ์ ( $r^{-1}$ )มีสิ่งที่น้องๆต้องรู้ดังนี้

(1) $r^{-1}$ เขียนได้ 3 แบบ

1. สลับหน้า , 2. สลับหลัง , 3. สลับหลังแล้วจัด y ในเทอม x

เช่น $r = \{ (x,y) \in A \times B \mid y = \sqrt{x-1} \}$

แบบที่ 1. $r^{-1} = \{ (y,x) \in B \times A \mid y = \sqrt{x-1} \}$

แบบที่ 2. $r^{-1} = \{ (x,y) \in A \times B \mid x = \sqrt{y-1} \}$

แบบที่ 3. เอาแบบที่ 2. มาทำต่อ ( มาจัด y ในเทอม x )

จาก $x = \sqrt{y-1} \rightarrow x^2 = y-1 , x \geq 0 \rightarrow y = x^2+1 , x \geq 0$

$$\boxed{r^{-1} = \{ (x,y) \in A \times B \mid y = x^2+1 , x \geq 0 \}}$$

(2) $\boxed{D_{r^{-1}} = R_r \text{ และ } R_{r^{-1}} = D_r}$

(3) ถ้าพับกราฟ **r** ตามแนวเส้นตรง y = x จะได้กราฟ $\mathbf{r^{-1}}$

### การตรวจสอบ r ว่าเป็น f หรือไม่ ( ไม่เน้นเคยออกแค่ 1 ครั้ง !! )

(1) ใช้นิยาม "ถ้า $(x,y_1) \in f$ และ $(x,y_2) \in f$ แล้ว $y_1 = y_2$ "

(2) ใช้การลองแทนคู่อันดับ " f คือ r ที่ Dr ไม่ซ้ำ "

(3) ใช้กราฟ "ถ้าลากเส้นตรงขนานแกน y ตัดกราฟเกิน 1 จุด จะไม่เป็น f "

### วิธีการหาค่าฟังก์ชัน f(x)

(1) ให้ f(x) มา $\rightarrow$ ง่ายๆ ถามปุ๊ป แทนปั๊บ

เช่น $f(x) = 2x+1$ แล้วจะได้ว่า $f(\square) = 2\square + 1$

(2) ไม่ให้ f(x) มา $\rightarrow$ ให้ใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปร ( ปตป.) เช่น $f( 3x-1 ) = 2-x$ จงหา f(x)

ให้ $3x-1 = k$ จะได้ว่า $x = ( k+1)/3 \rightarrow f(k) = 2-( k+1)/3 = ( 6-k-1 ) / 3$

$f(\square) = ( 5-\square ) / 3$ จึงสรุปได้ว่า $f(x) = ( 5-x )/3$

### พีชคณิตฟังก์ชัน ( Algebra of function )

$$\left.\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ (f/g)(x) &= f(x) / g(x) \; ; \; g(x) \neq 0 \end{aligned}\right\}$$

*" เหมือนกับการกระจาย x เข้าไปในวงเล็บได้เลยไม่ว่าจะเป็น + , – , ×, ÷ ( ÷ ต้องระวังอย่าให้ส่วนเป็น 0 )"*

- โดเมนของพีชคณิตฟังก์ชัน ( สมัยก่อนออกบ่อย แต่ PAT ยังไม่เคยออก )

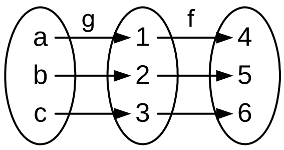
$$\boxed{D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g}$$

$$\boxed{D_{f/g} = . \; D_f \cap D_g - \{ x \mid g(x) = 0 \}}$$

" โดเมนเอาตัวที่เหมือนกัน แล้วเรนจ์ทำกันตามเครื่องหมาย

( ยกเว้น f/g โดเมนเอาตัวที่เหมือนกัน และระวังอย่าให้ส่วนเป็น 0 "

### ฟังก์ชันประกอบ ( Composite function )

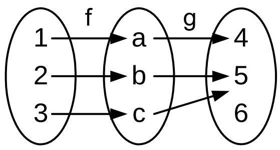



fog อ่านว่า โดเมน g ยิงใส่เรนจ์ f

$fog = \{ (a,4),(b,5),(c,6) \}$

fog จะหาค่าได้เมื่อ $R_g \cap D_f \neq \phi$

$$\boxed{fog(x) = f(g(x))}$$




gof อ่านว่า โดเมน f ยิงใส่เรนจ์ g

$gof = \{ (1,4),(2,5),(3,5) \}$

gof จะหาค่าได้เมื่อ $R_f \cap D_g \neq \phi$

$$\boxed{gof(x) = g(f(x))}$$

- โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันประกอบ

$D_{fog} = D_{fog}$ ที่หาได้ $\cap D_g$ , $R_{fog} = R_{fog}$ ที่หาได้ $\cap R_f$

$D_{gof} = D_{gof}$ ที่หาได้ $\cap D_f$ , $R_{gof} = R_{gof}$ ที่หาได้ $\cap R_g$

### ฟังก์ชันอินเวอร์ส ( ฟังก์ชันผกผัน ) ( Inverse function )

(1) วิธีการหาค่าฟังก์ชัน $f^{-1}(x)$ ( โจทย์จะมีแค่ 2 แบบ คือ )

- ให้ f(x) มา " สลับ x กับ y แล้วจัด y ในเทอม x "
- ไม่ให้ f(x) มา " ถ้า $f(\square) = \Delta$ แล้ว $f^{-1}(\Delta) = \square$ "

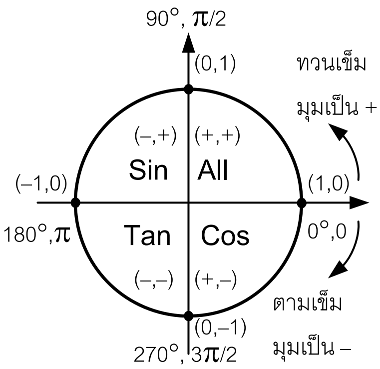
(2) วิธีการเขียน $f^{-1}$ " ทำเหมือนการเขียน $r^{-1}$ "

- โดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันอินเวอร์ส

$$\boxed{D_{f^{-1}} = R_f \text{ และ } R_{f^{-1}} = D_f}$$

# บทที่ 6. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ Created by P'1 NISIT TUTOR <Tel. 085–999–9449>

## วงกลม 1 หน่วย ( The Unit Circle )




**→ สิ่งที่ควรทราบ**

(1) $x = \cos\theta$ , $y = \sin\theta$

(2) $\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$

(3) $-1 \le \sin\theta, \cos\theta \le 1$

(4) $-\infty < \tan\theta < \infty$

(5) $180^\circ = \pi$ rad

(6) $\theta = \dfrac{S}{R}$ ( ขอบชีส/รัศมี )

| | $0^\circ$, 0 | $30^\circ,\pi/6$ | $45^\circ,\pi/4$ | $60^\circ,\pi/3$ | $90^\circ,\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sin | 0 | 1/2 | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| cos | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1/2 | 0 |
| tan | 0 | $1/\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | หาค่าไม่ได้ |

## การยุบมุม

(1) ยุบเทียบ x → เต็มๆ$\pi\pm\theta$ → หาควอดรันต์ → ยุบได้ f เดิม

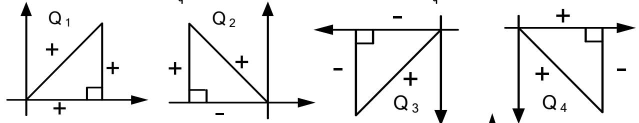
(2) ยุบเทียบ y → ครึ่งๆ$\pi\pm\theta$ → หาควอดรันต์ → ยุบได้ Co–f

(3) ยุบเมื่อมุมติดลบ ( อาจไม่ต้องจำก็ได้ )

$$\boxed{\sin(-\theta) = -\sin\theta\ ,\ \cos(-\theta) = \cos\theta\ ,\ \tan(-\theta) = -\tan\theta}$$

## ซื้อ 1 แถม 5

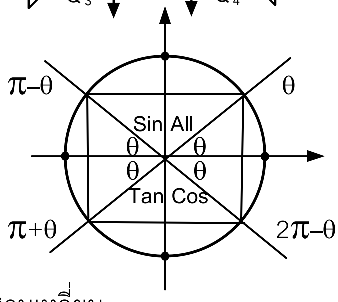
(1) หาควอดรันต์ของมุมที่พิจารณา (2) วาด$\Delta$มุมฉากตามควอดรันต์




## การแก้สมการตรีโกณมิติ

(1) หามุมที่ทำให้สมการเป็นจริง โดยไม่ดูเครื่องหมาย

(2) ตอบมุมตามควอดรันต์โดยที่




## สูตรมุมประกอบ ( Compound Angle )

- $\sin(A\pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$
  ( sin , cos , cos , sin เครื่องหมายเดิม )
- $\cos(A\pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$
  ( cos , cos , sin , sin เครื่องหมายเปลี่ยน )
- $\tan(A\pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A\tan B}$

( ข้างบนเครื่องหมายเดิม,ข้างล่างเครื่องหมายเปลี่ยน )

## อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ( arc )

(1) เจอ arc เหมือนเจอมุม → สมมติมุม → วาดสามเหลี่ยม
โดย arcsin(1/2) อ่านว่า sin อะไรได้ 1/2 [ a – r = อะไร ]

(2) สูตร arc มุมติดลบ ( ห้ามใช้กรณีมีการเอาหลายมุมมารวมกัน ต้องเช็คโดเมนด้วย )

$$\boxed{\arcsin(-x) = -\arcsin x\ ,\ \arccos(-x) = \pi-\arccos x\ ,\ \arctan(-x) = -\arctan x}$$

$y = \arcsin x$ : $[-\pi/2, \pi/2]$ , $[-1,1]$ ; $y = \arccos x$ : $[0,\pi]$ , $[-1,1]$ ; $y = \arctan x$ : $(-\pi/2, \pi/2)$ , R

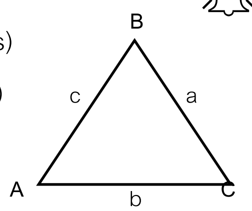
(3) สูตรยุบ arctan

$$\boxed{\text{actan } x + \text{actan } y = \arctan\left(\frac{x\pm y}{1\mp xy}\right)}$$

## สูตรมุม 2 เท่า ( Double Angle )

- $\sin 2A = 2\sin A\cos A$
- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ ( mix )
  $= 2\cos^2 A - 1$ (pure cos)
  $= 1 - 2\sin^2 A$ (pure sin)
- $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

## Law of sin , Law of cosine




**Law of cosine**

$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2 = a^2+c^2-2ac\cos B$

$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$

" ใช้เมื่อ รู้ 2 ด้าน 1 มุม ( มุมระหว่างด้าน )" หรือ " รู้ 3 ด้าน "

**Law of sine**

$\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$ หรือ

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ หรือ

$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$

" ใช้เมื่อ**ไม่**ใช้ Law of cosine "

## สูตรมุม 3 เท่า ( Treble Angle )

- $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$
- $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$
- $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

## สูตรพื้นที่ $\Delta$ ใดๆ $= \frac{1}{2}ab\sin C$ , $= \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$

## สูตรมุม 1/2 เท่า ( Half Angle )

- $\sin\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$
- $\cos\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}$
- $\tan\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

## สูตรผลคูณ ↔ ผลบวก , ผลต่าง ( 8 เทพอสูร )

- $\sin A + \sin B = 2\sin(A+B)/2 \cdot \cos(A-B)/2$
- $\sin A - \sin B = 2\cos(A+B)/2 \cdot \sin(A-B)/2$
- $\cos A + \cos B = 2\cos(A+B)/2 \cdot \cos(A-B)/2$
- $\cos A - \cos B = -2\sin(A+B)/2 \cdot \sin(A-B)/2$
- $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
- $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
- $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
- $-2\sin A\sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$

*สูตรมุมครึ่งเท่าจะใช้ + หรือ – ขึ้นกับว่า $\dfrac{A}{2}$ อยู่ควอดรันต์ใด

# บทที่ 7. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และ ฟังก์ชันลอการิทึม

- **หลักการแก้สมการรูท**

  ใช้หลักการยกกำลัง 2 สองฝั่ง เป็นหลัก ประกอบกับเทคนิคการเปลี่ยนตัวแปร ( ปตป. ) เข้าช่วย

- **รากที่สองของ** $x \pm 2\sqrt{y}$ , $\sqrt{x \pm 2\sqrt{y}}$ ( ไม่เน้น )

$\boxed{\sqrt{x \pm 2\sqrt{y}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ เมื่อ $ab = y$ , $a+b = x$

$\boxed{\text{รากที่สองของ } x \pm 2\sqrt{y} = \pm(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})}$

→ JUM ! " คูณกันได้ตัวใน บวกกันได้ตัวนอก "

Ex1. $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$

แต่ รากที่สองของ $8+2\sqrt{15} = \pm(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

Ex2. $\sqrt{7-\sqrt{24}} = \sqrt{7-2\sqrt{6}} = \sqrt{6}-\sqrt{1}$

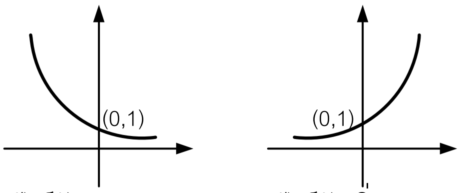
แต่ รากที่สองของ $7-\sqrt{24} = \pm(\sqrt{6}-\sqrt{1})$

Ex3. $\sqrt{5-\sqrt{21}} = \sqrt{5-\dfrac{2\sqrt{21}}{2}} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}$

$= (\sqrt{7}-\sqrt{3}) / \sqrt{2}$

- Exponential Function

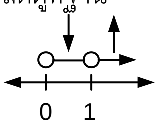
$\boxed{f = \{ (x,y) \in R \times R^+ \mid y = a^x , a > 0 , a \neq 1 \}}$




ฟังก์ชันลด ( 0<a<1 ) ฟังก์ชันเพิ่ม (a>1 )

JUM

Expo จะเพิ่มหรือลดดูที่ฐาน




- **การแก้สมการ** Exponential

→ มี 2 พจน์

ถ้า $a^m = a^n$ แล้ว $m = n$ "ใช้เมื่อฐานเท่ากัน "

ถ้า $a^m = b^n$ แล้ว $m = n = 0$ "ใช้เมื่อฐานไม่เท่ากัน "

ถ้า $a^m = b^n$ และ $m \neq n \neq 0$ " ต้อง take log "

→ มี 3 พจน์ ( เน้นสุดๆออกบ่อย )

" จัดรูปเลขชี้กำลังพจน์กลางเป็นครึ่งหนึ่งของพจน์หน้า แล้วแยก factor ( อาจใช้เทคนิค ปตป. เข้าช่วย ) "

→ มี > 3 พจน์ " ใช้การจับคู่ดึงตัวร่วม + กับการแยก factor "

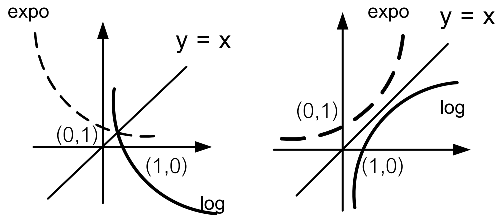
- **การแก้อสมการ** Exponential

→ ใช้หลักการ f เพิ่ม , f ลด เข้าช่วย กล่าวคือ

| f เพิ่ม ( a > 1 ) | f ลด ( 0 < a < 1 ) |
|---|---|
| ถ้า $a^m < a^n$ แล้ว $m < n$ | ถ้า $a^m < a^n$ แล้ว $m > n$ |
| ถ้า $a^m > a^n$ แล้ว $m > n$ | ถ้า $a^m > a^n$ แล้ว $m < n$ |
| " เครื่องหมายเดิม " | " เครื่องหมายเปลี่ยน " |

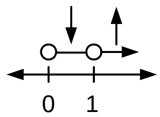
- Logarithmic Function

$\boxed{f = \{ (x,y) \in R^+ \times R \mid y = \log_a x , a > 0 , a \neq 1 \}}$




ฟังก์ชันลด ( 0<a<1 ) ฟังก์ชันเพิ่ม (a>1 )

JUM ! log จะเพิ่มหรือลด ก็ดูที่ฐาน




- **สมบัติ log ( สูตร log )**

(1)* ถ้า $\log_a M = N$ แล้ว $M = a^N$ ( กฎการปลด log , ดันตูส )

(2) $\log_a 1 = 0$ (3) $\log_a a = 1$ (4) $\log_{10} x = \log x$

(5) $\ln x = \log_e x$ , $e \approx 2.7183\ldots$

(6) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ ( log ผลคูณ = ผลบวกของ log )

(7) $\log_a M/N = \log_a M - \log_a N$ ( log ผลหาร = ผลต่างของ log )

เช่น $\log 5 = \log(10/2) = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$

(8) $\log_a M = \dfrac{\log_N M}{\log_N a} = \dfrac{\log M}{\log a} = \dfrac{1}{\log_M a}$ ( กฎการเปลี่ยนฐาน log )

(9)** $\log_{a^q} M^p = \dfrac{p}{q} \log_a M$ ( บนตบบน , ล่างตบล่าง )

(10)** $a^{\log_a M} = M$ ( ฐานเท่ากัน , ตอบเลขหลัง log )

- **การแก้สมการ log**

(1) log ฝั่งเดียว → ใช้กฎการปลด log , ดันตูส

กล่าวคือ " ถ้า $\log_a M = N$ แล้ว $M = a^N$ "

(2) log 2 ฝั่ง → ทำฐานให้เท่ากัน แล้ว ปลด log ทิ้งทั้ง 2 ฝั่ง

กล่าวคือ " ถ้า $\log_a M = \log_a N$ แล้วจะได้ว่า $M = N$

(3)* ตรวจคำตอบ 2 ที่ทุกครั้ง

1. หลัง log ต้อง > 0 2. ฐาน log ต้อง >0 และ ≠ 1

- **การแก้อสมการ log**

(1) log ฝั่งเดียว → ใช้กฎการปลด log , ดันตูส

| f เพิ่ม ( a > 1 ) | f ลด ( 0 < a < 1 ) |
|---|---|
| ถ้า $\log_a M < N$ แล้ว $M < a^N$ | ถ้า $\log_a M < N$ แล้ว $M > a^N$ |
| ถ้า $\log_a M > N$ แล้ว $M > a^N$ | ถ้า $\log_a M > N$ แล้ว $M < a^N$ |

(2) log 2 ฝั่ง → ทำฐานให้เท่ากัน แล้ว ปลด log ทิ้งทั้ง 2 ฝั่ง

| f เพิ่ม ( a > 1 ) | f ลด ( 0 < a < 1 ) |
|---|---|
| ถ้า $\log_a M < \log_a N$ แล้ว $M < N$ | ถ้า $\log_a M < \log_a N$ แล้ว $M > N$ |
| ถ้า $\log_a M > \log_a N$ แล้ว $M > N$ | ถ้า $\log_a M > \log_a N$ แล้ว $M < N$ |

$\boxed{\text{SA-RUP " f เพิ่ม ปลดได้เลย f ลด เปลี่ยนเครื่องหมายเป็นตรงข้าม "}}$

(3) ตรวจคำตอบ 2 ที่ทุกครั้ง ( เหมือนสมการ log )

# บทที่ 8. ระบบสมการเชิงเส้น และ เมทริกซ์ Created by P'1 NISIT TUTOR

- **เรื่องพื้นฐานเกี่ยวกับเมตริกซ์ที่ควรทราบ**

→ มิติของเมตริกซ์ ( แถว×หลัก ) " โดยหลัก – ปักลงพื้น "

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$ แถว หลัก

→ การคูณเมตริกซ์ ใช้หลัก " แถวตัวหน้า×หลักตัวหลัง "

เงื่อนไขเมตริกซ์ที่จะคูณกันได้มีดังนี้ $[\mathbf{A}]_{m\times n} \times [\mathbf{B}]_{p\times q} = [\mathbf{C}]_{m\times q}$

ใกล้ = ใกล้

ไกล×ไกล

→ ทรานสโพสของเมตริกซ์ ( $A^t$ ) " สลับแถวสลับหลัก "

→ เมตริกซ์เอกลักษณ์การคูณ ( **I** )

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ $\boxed{\textbf{JUM}\ \ \mathbf{I\times A = A\times I = A}}$

→ อินเวอร์สการคูณ ( $A^{-1}$ ) $\boxed{\textbf{JUM}\ \ \mathbf{A^{-1}\times A = A\times A^{-1} = I}}$

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แล้ว $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

→ **เมตริกซ์เอกฐาน** → det = 0 → หา $A^{-1}$ ไม่ได้

→ **เมตริกซ์ไม่เอกฐาน** → det ≠ 0 → หา $A^{-1}$ ได้

- **สมบัติพื้นฐานเกี่ยวกับเมตริกซ์ที่ควรทราบ**

1. AB ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ BA ( ไม่มีสมบัติสลับที่การคูณ )
2. $(A\pm B)^t = A^t \pm B^t$
3. $(A\pm B)^{-1} \neq A^{-1} \pm B^{-1}$
4. $(AB)^t = B^tA^t$
5. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
6. $(kA)^{-1} = (1/k)\cdot A^{-1}$
7. $(kA)^t = kA^t$
8. $(A^t)^t = A$
9. $(A^{-1})^{-1} = A$
10. $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$
11. $A(B+C) = AB+AC$

- **ดีเทอร์มินันต์ของเมตริกซ์** ( Det )

2×2 ☛ ใช้หลักการ " **คูณลง – คูณขึ้น** "

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\quad \det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

3×3 ☛ ให้ต่อไปอีก 2 หลัก แล้วก็ " **คูณลง – คูณขึ้น** "

-24+0+0 = -24

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{matrix}$$

3+0+4 = 7

det A = " **คูณลง – คูณขึ้น** " = 7–(–24) = 31

n×n ☛ $\boxed{\det A = \Sigma a_{ij}c_{ij}}$ ( เคยออก 1 ครั้ง ) ;

$a_{ij}$ = สมาชิกแถว i หลัก j , $c_{ij}$ = โคแฟคเตอร์ของสมาชิกแถว i หลัก j

- **สูตร det ที่ต้องรู้**

1. ถ้า A = B แล้ว detA = detB
2. detAB = detA·detB
3. $\det(A^n) = (\det A)^n$
4. $\det(A\pm B) \neq \det A \pm \det B$
5. $\det A^t = \det A$
6. $\det A^{-1} = 1/\det A$
7. ถ้า A มีมิติ n×n จะได้ $\det(kA) = k^n \det A$
8. ถ้าแถว หรือ หลักใดเป็นศูนย์หมดทุกตัว det = 0
9. ถ้าสลับแถว หรือ สลับหลักกัน det ใหม่ = – det เดิม
10. ค่าคงที่คูณเมตริกซ์คูณทุกตัว , ค่าคงที่คูณ det คูณแค่แถวหรือหลักเดียว

- **ไมเนอร์** $M_{ij}(A)$ , **โคแฟคเตอร์** $C_{ij}(A)$ , adj(A) , $A^{-1}$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{\det A}}$$

↓

$$\boxed{\text{adj}A = [\text{cof } A]^t}$$

↓

$$\text{cof}A = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

↓

$$\boxed{C_{ij}(A) = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}(A)}$$

↓

$\boxed{M_{ij}(A) = \det \text{ เมื่อตัดแถวที่ i หลักที่ j ทิ้ง}}$

$A^{-1}$ = เมตริกซ์ผกผัน

adjA = เมตริกซ์ผูกพัน

JUM adjA ออกสอบแค่ 3 สูตร

สูตรที่ 1. $\boxed{\text{adj}A = [\text{cof } A]^t}$

สูตรที่ 2. $\boxed{\text{adj}A = A^{-1}\cdot\det A}$

สูตรที่ 3. $\boxed{\det(\text{adj}A) = (\det A)^{n-1}}$

cofA = เมตริกซ์ที่มีสมาชิกเป็น $c_{ij}(A)$

- Row–operation ( การดำเนินการตามแถว โดยน้องสามารถทำได้ 3 อย่าง )

$\boxed{(1)\ R_{ij} \text{ คือการสลับแถว i กับ j} \quad (2)\ k\cdot R_i \quad (3)\ R_i \pm k\cdot R_j\ ;\ k \in R}$

→ โดย Row – operation มีประโยชน์ดังนี้

(1) ไว้ทำให้หา det ได้ง่ายขึ้น โดย R.O. จะทำให้มี 0 เยอะๆ ( ใช้แค่ข้อ (3) )

1.1 อยากเปลี่ยนแถวไหนเขียน $R_i$ ไว้ท้ายแถว

1.2 ปลี่ยนโดย $R_i \pm k\cdot R_j$ ; k ∈ R

(2) ไว้ใช้หา $A^{-1}$ $\boxed{[A|I] \sim [I|A^{-1}]}$

(3) ไว้ใช้แก้สมการ $\boxed{[A|k] \sim [I|X]}$

*" ต้องใช้ทั้ง 3 ข้อ ของ Row–operation และอย่าลืมแปลงตามที่ P'1 สอนไม่งั้นพายเรือในอ่างแน่ๆ "*

- Cramer's Rule ( กฎของคราเมอร์ )

$a_1x+b_1y+c_1 = k_1$ JUM (1) หา det 4 ครั้ง

$a_2x+b_2y+c_2 = k_2$ (2) ส่วน คือ det ของเมตริกซ์ สปส.

$a_3x+b_3y+c_3 = k_3$ (3) เอาค่าคงที่แทนลงหลัก 1,2,3 เพื่อหา x,y,z ตามลำดับ

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

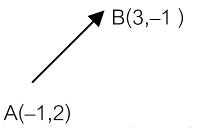
**บทที่ 9. เวกเตอร์ในสามมิติ** Created by P'1 NISIT TUTOR <Tel. 085 – 999 – 9449>

## • เรื่องพื้นฐานเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติที่ควรทราบ

1. การบอกตำแหน่ง วัดจากทิศเหนือเป็นหลักในทิศตามเข็ม
2. การ +, – vector ด้วยรูปภาพ

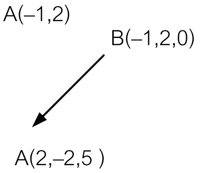
*" ให้นำ vector ที่จะนำมาบวกกันเขียนต่อกันแบบหาง–ต่อ–หัว ลากจากหางตัวแรกไปหัวตัวสุดท้ายเป็นผลบวก vector ทั้งหมด "*

3. การประกาศ ( เรียกชื่อ ) vector ในระบบแกนมุมฉาก อยากประกาศ vector ท่องไว้ ➔ ***"ปลาย – ต้น "***




$\overrightarrow{AB} = (3-(-1))\vec{i} + ((-1)-2)\vec{j}$

$\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$




$\overrightarrow{BA} = (2-(-1))\vec{i} + ((-2)-2)\vec{j} + (5-0)\vec{k}$

$\overrightarrow{BA} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$

4. จาก $\vec{u} = k\vec{v}$ จะได้ว่า (1) $\vec{u} \, // \, \vec{v}$ (2) $|\vec{u}| = |k| \cdot |\vec{v}|$
   (3) $k < 0$ , $\vec{u}$ สวนทาง $\vec{v}$ แต่ ถ้า $k > 0$ , $\vec{u}$ ทิศเดียวกับ $\vec{v}$
5. จาก $a\vec{u} = b\vec{v}$ โดยที่ $\vec{u}$ ไม่ขนาน $\vec{v}$ และ $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$

จะได้ว่า $a = b = 0$ ( จัดรูป $\vec{u} = \frac{b}{a} \cdot \vec{v}$ ไม่ได้ เพราะมันไม่ขนานกัน )

**การสร้างเวกเตอร์**

| | | |
|---|---|---|
| | $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j}$ | $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ |
| ขนาด vector | $\lvert \vec{u} \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$ | $\lvert \vec{u} \rvert = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ |
| Vector 1 หน่วย ที่มีทิศเดียว กับ $\vec{u}$ | $\frac{\vec{u}}{\lvert \vec{u} \rvert} = \frac{a\vec{i} + b\vec{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ | $\frac{\vec{u}}{\lvert \vec{u} \rvert} = \frac{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ |

## • ผลคูณเชิงสเกลาร์ ( Scalar Product or Dot product )

➔ 2 มิติ ( 2–D ) ถ้า $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ , $\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$ "หน้า i คูณกัน + หน้า j คูณกัน "

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\theta$ " ใช้เมื่อรู้มุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ "

➔ 3 มิติ ( 3–D ) ถ้า $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ , $\vec{v} = d\vec{i} + e\vec{j} + f\vec{k}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = ad + be + cf$ "หน้า i คูณกัน +หน้า j คูณกัน +หน้า k คูณกัน"

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\theta$ " ใช้เมื่อรู้มุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ "

**หมายเหตุ** มุมระหว่างเวกเตอร์ ($\theta$) ต้องอยู่ในช่วง 0–180° เท่านั้น และต้องมุมในลักษณะหางชนกัน

## • สิ่งที่ควรรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับผลคูณเชิงสเกลาร์

1. ถ้า $\vec{u} \perp \vec{v}$ แล้วจะได้ว่า $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ( $\cos 90^\circ = 0$ )

ท่องไว้เลยนะว่า " *ตั้งฉากกัน dot กัน = 0 ( ออกสอบบ่อยมาก )* "

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ ( การ dot สลับที่การคูณได้แต่ cross สลับไม่ได้นะ )
3. การ dot ทำได้เหมือนกับการคูณพหุนาม ( อันนี้ก็บ่อยมาก )

$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$ " ตัวเอง dot ตัวเองได้ขนาดตัวเองกำลังสอง "

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$

$(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = |2\vec{u} - \vec{v}|^2 = 4|\vec{u}|^2 - 4\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$

4. " อยากรู้มุมระหว่างเวกเตอร์คู่ใด ให้จับมัน dot กัน "

จาก $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\theta$

จะได้ว่า $\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ หรือ $\boxed{\theta = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}}$

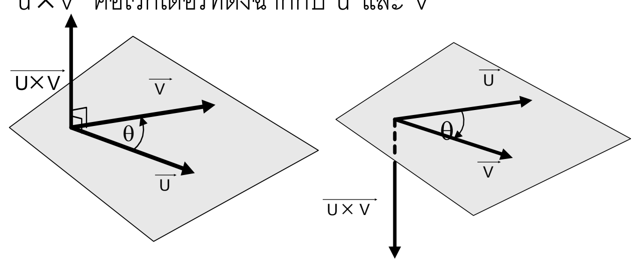
## • ผลคูณเชิงเวกเตอร์ ( Cross Product or Vector product )

➔ 3 มิติ ( 3–D ) ถ้า $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ , $\vec{v} = d\vec{i} + e\vec{j} + f\vec{k}$

$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ " ทำเหมือน det 3×3 คูณลง – คูณขึ้น "

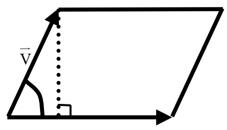
## • สิ่งที่ควรรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับผลคูณเชิงเวกเตอร์

1. $\vec{u} \times \vec{v}$ คือเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

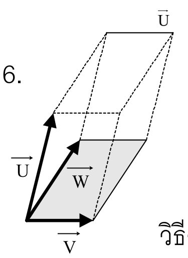



2. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$ [ $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{v} \times \vec{u}|$ ขนาดเท่าแต่ทิศตรงข้าม ]
3.* จากข้อ 1. และ ข้อ 2. จะได้ว่า

$\boxed{\text{เวกเตอร์ 1 หน่วยที่ตั้งฉากกับทั้ง } \vec{u}, \vec{v} = \pm \frac{(\vec{u} \times \vec{v})}{|\vec{u} \times \vec{v}|}}$

4. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ ( เมตริกซ์ที่ 2 แถว(หลัก) ใดซ้ำกัน det = 0 )
5. 

$|\vec{u} \times \vec{v}|$ = พื้นที่ ▭ ด้านขนานที่มี $\vec{u}, \vec{v}$ เป็นด้านประชิด

6. 

$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$ = ปริมาตรของทรง ▭ ด้านขนาน ( ทรงตัน ) ที่มี $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ เป็นด้านระกอบ

วิธีลัด* $\boxed{\text{ปริมาตรทรงตัน} = |\det \text{สามตัว}|}$

( เวลาคิดปริมาตรทรงตันจะเรียงลำดับเวกเตอร์อย่างไรก็ได้ )

# บทที่ 10. จำนวนเชิงซ้อน Created by P'1 NISIT TUTOR <Tel. 085 – 999 – 9449>

- **เรื่องพื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนที่ควรทราบ**

1. $i^n = i, -1, -i, 1$ โดยนำ n หาร 4 แล้วดูเศษที่เหลือ
โดย เหลือเศษ 1 ตอบ i , เหลือเศษ 2 ตอบ –1
เหลือเศษ 3 ตอบ – i , เหลือเศษ 0 ( หารลงตัว ) ตอบ 1

2. $z = a+bi$ , ส่วนจริง $Re(z) = a$ , ส่วนจินตภาพ $Im(z) = b$
เช่น $z = 2-3i$ , $Re(z) = 2$ , $Im(z) = -3$

3. สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน → " กลับเครื่องหมายหน้า i "
ถ้า $z = a+bi$ แล้ว $\bar{z} = a-bi$ เช่น $z = 2-3i$ , $\bar{z} = 2+3i$
$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z_1} \pm \bar{z_2}$ , $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$ , $\overline{z_1/z_2} = \bar{z_1}/\bar{z_2}$

- **ค่าสัมบูรณ์ และ สมบัติค่าสัมบูรณ์ที่ควรทราบ**

ถ้า $z = a+bi$ แล้ว $\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$

เช่น $z = 2-3i$ , $|z| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$ , $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ , $|z_1 \pm z_2| \neq |z_1| \pm |z_2|$

$|z^n| = |z|^n$ , $|z| = |\bar{z}|$ , $\boxed{z \cdot \bar{z} = a^2+b^2 = |z|^2}$

เช่น $z = 2-3i$ → $z \cdot \bar{z} = 2^2+(-3)^2 = 13$

<u>**ระวัง**</u>ไม่เหมือนเวกเตอร์ $|z_1+z_2|^2 \neq |z_1|^2 + 2z_1z_2 + |z_2|^2$

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\bar{z_1}+\bar{z_2})$$
$$= |z_1|^2 + z_1\bar{z_2} + z_2\bar{z_1} + |z_2|^2$$

- **การ +, – , ×, ÷ จำนวนเชิงซ้อน**

$z_1 = 2-3i$ และ $z_2 = -1+2i$

$z_1+z_2 = [2+(-1)]+[(-3)+2]i = 1-i$

$z_1-z_2 = [2-(-1)]+[(-3)-2]i = 3-5i$

$z_1 \cdot z_2$ ( ทำเหมือนการคูณพหุนาม ) $= (2-3i)(-1+2i)$
$= -2+4i+3i-6i^2 = -2+7i+6 = 4+7i$

$z_1 / z_2$ (นำคอนจูเกตของส่วนคูณได้บนและล่าง จำ $z \cdot \bar{z} = a^2+b^2$)

$$= \frac{2-3i}{-1+2i} \cdot \frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{-8-i}{(-1)^2+2^2} = -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$$

- **กราฟของจำนวนเชิงซ้อน** ( ส่วนใหญ่เป็นกราฟวงกลม )

" เจอ z ให้เปลี่ยนเป็น x+yi แล้ววาดกราฟเหมือนภาคตัดกรวย "

- **จำนวนเชิงซ้อนในรูปของพิกัดเชิงขั้ว** ( Polar Form )

$\boxed{z = a+bi \rightarrow |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \rightarrow |z|\,\mathrm{cis}\theta}$

1. หา $|z|$ จากสูตร $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
2. หา $\theta$ จากสูตร $\tan\theta = b/a$ ( ไม่ต้องดูเครื่องหมาย )
3. ตอบ $\theta$ ตามควอดรันต์ ( All – Sin – Tan – Cos )

( ในกรณี z มีแต่ a , b อย่างเดียว ตอบ $\theta$ ตามมุมประจำแกน x, y )

- **จำนวนจินตภาพแท้** คือ จำนวนเชิงซ้อนที่ส่วนจริง = 0 เช่น 2i

- **อินเวอร์สการคูณของจำนวนเชิงซ้อน** ($z^{-1}$) → $\boxed{z^{-1} = \dfrac{1}{z}}$

- **สมบัติจำนวนเชิงซ้อนในรูปของพิกัดเชิงขั้ว**

ถ้า $z_1 = |z_1|\,\mathrm{cis}\theta_1$ , $z_2 = |z_2|\,\mathrm{cis}\theta_2$

$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\,\mathrm{cis}(\theta_1+\theta_2)$ *" เชิงขั้วคูณกันขนาดคูณกันมุมบวกกัน "*

$z_1 / z_2 = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\,\mathrm{cis}(\theta_1-\theta_2)$ *" เชิงขั้วหารกันขนาดหารกันมุมลบกัน "*

$\boxed{z^n = |z|^n\,\mathrm{cis}\,n\theta \;,\; n \in \mathbf{I}}$ "ทฤษฎีบทของเดอมัวฟ์ "

**ระวัง !!!** ถ้า n เป็นเศษส่วนจะเป็นเรื่องการหารากที่ n

- **การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน**

**แบบที่ 1.** ไม่มี i → ใช้การแยก factor เป็นหลัก

**แบบที่ 2.** มี i รากที่สอง → $z^{1/2} = \sqrt{z} = \pm\left(\sqrt{\dfrac{|z|+a}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{|z|-a}{2}}\, i\right)$

รากที่ > 2 → ใช้การแยก factor ( ถ้าแยกได้ ?!? )

→ ถ้าแยกไม่ได้ ☹ $\boxed{z^{1/n} = |z|^{1/n}\mathrm{cis}\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right) \;,\; k \in 0,1,2,\ldots,n-1}$

Tip ☺ " รากแรกเหมือนเดอมัวฟ์ ($Z_0 = |z|^{1/n}\mathrm{cis}\dfrac{\theta}{n}$ ) รากต่อไปมั่วๆ +ด้วย $\dfrac{2\pi}{n}$ "

- **การแก้สมการพหุนาม** ( Polynomial equation )

กำลัง 2 → แยก factor , ถ้าแยกไม่ได้ใช้สูตร $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

กำลัง ≥ 3 → จับคู่ดึงตัวร่วม หรือ หารสังเคราะห์ ( Synthetic Division )

**Tip หารสังเคราะห์**

(1) ถ้าผลรวมสัมประสิทธิ์ = 0 → " 1 ใช้ได้ "

(2) ถ้าผลรวมสัมประสิทธิ์สลับกันเท่ากัน → " –1 ใช้ได้ "

- **สิ่งที่ควรรู้เกี่ยวกับการแก้สมการพหุนาม**

1. ทฤษฎีของ z กับ $\bar{z}$ สมการพหุนามซึ่ง <u>**สปส.ทุกตัว ∈ R**</u>

| ถ้า $z = a + bi$ เป็นคำตอบของสมการ $\bar{z} = a - bi$ เป็นคำตอบด้วย |
|---|

เช่น ถ้าโจทย์บอกว่า 2–i และ 3i เป็นคำตอบของสมการ f(x) = 0 แปลว่า
$f(x) = a[x-(2-i)][x-(2+i)][x-(3i)][x-(-3i)]$
$= a[(x-2)-i][(x-2)+i)](x-3i)(x+3i)$

**ระวัง!!** สปส. หน้าสุดถ้าโจทย์ไม่บอกมาห้ามคิดว่า = 1
( ในโจทย์จะมีเงื่อนไขเหลือให้หา สปส.ตัวหน้าเอง )

2. กฎของวีต $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + z = 0$ ( หน้าสุดต้องเป็น 1 นะ )

จะได้ ผลบวกคำตอบทั้งหมด $= -a$
ผลคูณคำตอบทั้งหมด $= z$ , n เป็นจำนวนคู่
$= -z$ , n เป็นจำนวนคี่

**หมายเหตุ** อาร์กิวเมนต์ คือ มุมที่ตามหลัง cis หรือ $\theta$ นั่นเอง

# บทที่ 11. ลำดับ และ อนุกรม Created by P'1 NISIT TUTOR <Tel. 085 – 999 – 9449>

- **ลำดับและอนุกรมเลขคณิต " ขวา – ซ้าย = ค่าคงที่ (d) "**

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[\,2a_1 + (n-1)d\,]}$$

- **ลำดับและอนุกรมเรขาคณิต " ขวา÷ ซ้าย = ค่าคงที่ ( r ) "**

$$\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}\ ,\ \boxed{S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}}\ ,\ \boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1-r},\ |r|<1}$$

- **สมบัติที่ควรทราบ $\sum$**

(1) $\sum_{i=1}^{N} c = Nc$ "$\sum$ค่าคงที่ได้ค่าคงที่คูณ N" , $\sum_{i=1}^{6} 5 = 5(6) = 30$

(2) $\sum_{i=1}^{N} kx_i = k\sum_{i=1}^{N} x_i$ " ค่าคงที่ดึงออกนอก$\sum$ได้ " , $\sum 5x = 5\sum x$

(3) $\sum_{i=1}^{N}(x_i \pm y_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i \pm \sum_{i=1}^{N} y_i$ " $\sum$ แจก$\pm$ได้แต่แจก$\times,\div$ ไม่ได้ "

| สัญลักษณ์ | ความหมาย | รูปย่อ | สูตร |
|---|---|---|---|
| $\sum_{i=1}^{n} i$ | $1+2+\ldots+n$ | $\sum n$ | $\frac{n(n+1)}{2}$ |
| $\sum_{i=1}^{n} i^2$ | $1^2+2^2+\ldots+n^2$ | $\sum n^2$ | $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ |
| $\sum_{i=1}^{n} i^3$ | $1^3+2^3+\ldots+n^3$ | $\sum n^3$ | $[\sum n]^2 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$ |

- **ลิมิตของลำดับอนันต์** $\lim_{n\to\infty} a_n$

1. ให้แทนค่า $n = \infty$ ลงใน $a_n$ ได้ค่าเท่าไรก็ตอบเท่านั้น โดยที่

$$\frac{k}{0} = \infty\ ,\ \frac{k}{\infty} = 0\ ,\ \frac{\infty}{k} = \infty\ ,\ \frac{0}{k} = 0$$

2. ถ้าแทนแล้วได้ค่าเป็น $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty$ **ห้ามสรุป!** ให้รีบทำต่อโดย

   2.1 ดึงตัวร่วม 2.2 แยกแฟกเตอร์ 2.3 คูณด้วยคอนจูเกต

3. ในกรณีที่ $a_n$ อยู่ในรูปฟังก์ชันตรรกยะ ให้พิจารณาดังนี้

3.1 ถ้าดีกรีสูงสุดของเศษ $>$ ส่วน ตอบ หาค่าไม่ได้ ( $\infty,-\infty$ )

3.2 ถ้าดีกรีสูงสุดของเศษ = ส่วน ตอบ สปส. / สปส.

3.3 ถ้าดีกรีสูงสุดของเศษ $<$ ส่วน ตอบ 0

4. ในกรณีที่ $a_n$ อยู่ในรูปเศษส่วน expo ให้พิจารณาดังนี้

4.1 ถ้าฐานสูงสุดของเศษ $>$ ส่วน ตอบ หาค่าไม่ได้ ( $\infty,-\infty$ )

4.2 ถ้าฐานสูงสุดของเศษ = ส่วน ตอบ สปส. / สปส.

4.3 ถ้าฐานสูงสุดของเศษ $<$ ส่วน ตอบ 0

- **อนุกรมจำกัด ( ผลบวก n พจน์ย่อย , $S_n$ )**

1. อนุกรมจำกัดที่เกิดจากการ take $\sum$ ( $S_n = \sum a_n$ )

   จากนิยามว่า $S_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n$ จึงสรุปได้ว่า $\boxed{S_n = \sum a_n}$

"ขั้นแรกหา $a_n$ ก่อน , take $\sum$ ,ใช้สูตร $\sum n, \sum n^2, \sum n^3$ เข้าช่วย"

2. อนุกรมเลขคณิตจำกัด

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)\text{ , ใช้เมื่อรู้ } a_n\ ,\ S_n = \frac{n}{2}[\,2a_1 + (n-1)d\,]\text{ , ใช้เมื่อรู้ } d}$$

3. อนุกรมเรขาคณิตจำกัด $\boxed{S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}\ ,\ r \neq 1}$

4. อนุกรมแยกเศษส่วนย่อย ( แบบที่ n อยู่ที่ส่วน ) เช่น

$S_n = \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots$ ( 2 พจน์แบบตัดพจน์ ต่อ พจน์ ง่าย )

$S_n = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \ldots$ ( 2 พจน์แบบตัดข้ามพจน์ ยากหน่อย )

$S_n = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$ ( 3 พจน์ ขออย่าเจอตัดข้ามพจน์! )

ให้จัด $a_n = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{\text{ตัวหน้า}} - \frac{1}{\text{ตัวหลัง}}\right)$ , $a_n = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{2\text{ตัวหน้า}} - \frac{1}{2\text{ตัวหลัง}}\right)$

- **อนุกรมอนันต์ ( ผลบวกอนุกรมอนันต์ ,** $\lim_{n\to\infty} S_n$ , $S_\infty$ )

1. อนุกรมอนันต์ที่เกิดจากการ take $\sum$

$$a_n \xrightarrow{\text{Take } \sum} \sum a_n = S_n \xrightarrow{\text{Take lim}} \lim_{n\to\infty} S_n = S_\infty$$

ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n$ , $S_\infty$ หาค่าได้ จะเรียกว่า " อนุกรมคอนเวอร์เจนต์ "

ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n$ , $S_\infty$ หาค่า**ไม่ได้** จะเรียกว่า " อนุกรมไดเวอร์เจนต์ "

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n$ หาค่าได้ จะเรียกว่า " ลำดับคอนเวอร์เจนต์ "

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n$ หาค่า**ไม่ได้** จะเรียกว่า " ลำดับไดเวอร์เจนต์ "

2. อนุกรมเลขคณิตอนันต์ ( ทุกอนุกรมเป็นไดเวอร์เจนต์หมด ยกเว้น 0+0+ .... จึงเป็นคอนเวอร์เจนต์ และมี ลิมิต = 0 )

3. อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ $\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1-r},\ |r|<1}$

4. อนุกรมแยกเศษส่วนย่อยอนันต์ , Tele–scropic

   คือ การนำอนุกรมแยกเศษส่วนย่อย ( จำกัด ) มา take $\lim_{n\to\infty}$

   ( เน้นแบบนี้มากๆ ปีหลังๆออกบ่อย !! )

5. อนุกรมผสมเลข – เรขาคณิต ( A.G.S ) ( อันนี้ก็เน้น )

$$a_n = \frac{\text{เศษ} \longrightarrow \text{มักจะเป็นเลขคณิต}}{\text{ส่วน} \longrightarrow \text{ต้องเป็นเรขาคณิต}}$$

เวลาทำให้เอา 1/r คูณตลอด ( ลองดูวิธีทำโดยละเอียดในชีทอีกที )

## บทที่ 12. แคลคูลัสเบื้องต้น Created by P'1 NISIT TUTOR <Tel. 085 – 999 – 9449>

- **วิธีการหาค่า** $\lim_{x\to a} f(x)$

1. ให้แทน x = a ลงใน f(x) ได้ค่าเท่าไรตอบเท่านั้น โดยที่

$\frac{k}{0} = \infty$ , $\frac{k}{\infty} = 0$ , $\frac{\infty}{k} = \infty$ , $\frac{0}{k} = 0$

2. ถ้าแทนแล้วได้ $\frac{0}{0}$ , $\frac{\infty}{\infty}$ , $\infty-\infty$ ห้ามสรุป! ให้รีบทำต่อโดยการ

2.1 ดึงตัวร่วม 2.2 แยก factor 2.3 คูณด้วยคอนจูเกต

2.4 ใช้กฎของโลปิตาล ( L'Hopital's Rule ) ( ไม่เคยออก )

- **ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน**

1. $\lim_{x\to a} f(x)$ → f(x) มีค่าประมาณเท่าไร ถ้า x มีค่าใกล้ๆ a

จะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ ( ลิมิตซ้าย = ลิมิตขวา )

2. $\lim_{x\to a^+} f(x)$ → f(x) มีค่าประมาณเท่าไร ถ้า x > a อยู่นิดๆ

3. $\lim_{x\to a^-} f(x)$ → f(x) มีค่าประมาณเท่าไร ถ้า x < a อยู่หน่อยๆ

4. f(a) → f(x) มีค่าเท่ากับเท่าไร ถ้า x = a

หมายเหตุ $\lim_{x\to a^+} f(x)$ = ลิมิตขวา , $\lim_{x\to a^-} f(x)$ = ลิมิตซ้าย

<u>**นิยาม**</u> f จะต่อเนื่องที่จุด x = a ก็ต่อเมื่อ

วิธีที่ 1. สามารถวาดกราฟผ่านจุด x = a ได้โดยไม่ยกปากกา

วิธีที่ 2. (1) f(a) หาค่าได้ (2) $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้

(3) (1) = (2)

- **อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ( อตกปป.) มี 2 แบบ**

1. โดยเฉลี่ย $= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

2. ขณะ x มีค่าใดๆ $= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หรือ

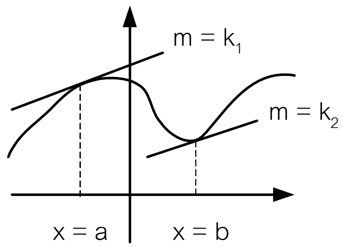
( อนุพันธ์อันดับที่ 1 , ดิฟครั้งที่ 1 , $y'$ , $f'(x)$ , $\frac{dy}{dx}$ )

- **เทคนิคการหาอนุพันธ์ ( สูตร diff )**

1. ถ้า f(x) = c แล้ว $f'(x) = 0$
2. ถ้า $f(x) = x^n$ แล้ว $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ [ f(x) = x , $f'(x) = 1$ ]
3. ถ้า f(x) = cg(x) แล้ว $f'(x) = c\cdot[\,g'(x)\,]$
4. ถ้า $f(x) = g(x) \pm h(x)$ แล้ว $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
5. ถ้า $f(x) = g(x)\times h(x)$ แล้ว $f'(x) = g(x)h'(x) + h(x)g'(x)$
6. ถ้า $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ แล้ว $f'(x) = \frac{h(x)g'(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$
7. ถ้า $f(x) = [g(x)]^n$ แล้ว $f'(x) = n[g(x)]^{n-1}\cdot[g'(x)]$
8. ถ้า y = fog(x) = f[g(x)] แล้ว $y' = f'[g(x)]\cdot[g'(x)]$

ถ้า y = gof(x) = g[f(x)] แล้ว $y' = g'[f(x)]\cdot[f'(x)]$

- **ความชันเส้นโค้ง** [ $f'(x)$ = ความชันเส้นโค้งที่ x ใดๆ ]




$\boxed{m_{โค้ง} = m_{ผัส}}$

จะได้ว่า $f'(a) = k_1$

$f'(b) = k_2$

- **การกระจัด s(t) , ความเร็ว v(t) , ความเร่ง a(t)** ( ไม่เน้น )

ความเร็ว v(t) → โดยเฉลี่ย = $\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$

→ ขณะ t ใดๆ $= s'(t) = v(t)$

ความเร่ง a(t) → โดยเฉลี่ย= $\frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}$

→ ขณะ t ใดๆ $= v'(t) = a(t)$

SA–RUP $s(t) \xrightarrow{\prime} v(t) \xrightarrow{\prime} a(t)$

$v(t) = s'(t)$

$a(t) = v'(t) = s''(t)$

- **ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์**

ขั้นที่ 1. หาค่าวิกฤตก่อน โดยค่าวิกฤตมี 2 ความหมาย กล่าวคือ

– ค่า x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$ , $f'(c) = 0$

– ค่า x ที่ทำให้ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้ , $f'(c)$ = หาค่าไม่ได้

ขั้นที่ 2. เรียงค่าวิกฤตที่ได้จากน้อยไปมาก แล้วพิจารณาดังนี้

– ถ้าหน้า $f'(x)$ เป็น + ขวามือสุดเป็นจุดต่ำสุดแล้วสลับไปเรื่อยๆ

– ถ้าหน้า $f'(x)$ เป็น – ขวามือสุดเป็นจุดสูงสุดแล้วสลับไปเรื่อยๆ

– ในกรณีที่ค่าวิกฤตซ้ำกับเป็นจำนวนคู่ อาจจะเป็นจุดเปลี่ยนเว้า

– ในกรณีที่ค่าวิกฤตซ้ำกับเป็นจำนวนคี่ ให้พิจารณาตามปกติ

- **ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์**

→ ค่า<u>สูง</u>สุดสัมบูรณ์ คือ ค่าที่<u>สูง</u>ที่สุดในบรรดาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ กับ ค่า y ที่ต้นช่วง และ ปลายช่วง

→ ค่า<u>ต่ำ</u>สุดสัมบูรณ์ คือ ค่าที่<u>ต่ำ</u>ที่สุดในบรรดาค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ กับ ค่า y ที่ต้นช่วง และ ปลายช่วง

- **เทคนิคการอินทิเกรต ( สูตรอินทิเกรต )**

1. $\int k\,dx = kx + c$
2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ $n \neq -1$

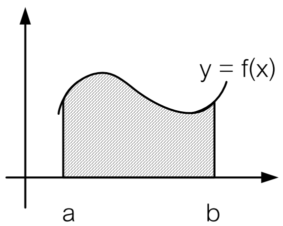
- **อินทิกรัล( ปริพันธ์ )จำกัดเขต** คือ อินทิเกรตเสร็จแล้วไม่ต้องบวกค่า c → $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ , $F(x) = \int f(x)dx$

- **โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับอินทิเกรต**

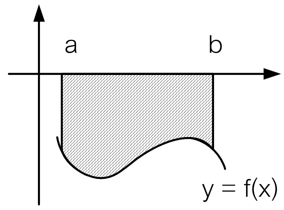
$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\text{อินทิเกรต}}{\overset{\text{ดิฟ}}{\rightleftarrows}} f(x) \underset{\text{อินทิเกรต}}{\overset{\text{ดิฟ}}{\rightleftarrows}} f'(x) \underset{\text{อินทิเกรต}}{\overset{\text{ดิฟ}}{\rightleftarrows}} f''(x)$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| – พ.ท.ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน x ตั้งแต่ $x = a$ ถึง $x = b$ | – สมการเส้นโค้ง<br>– สมการ xxx<br>– y | – ความชันเส้นโค้ง<br>– ความชันเส้นสัมผัส<br>– อัตราการเปลี่ยนแปลง xxx<br>– $y'$ , $\frac{dy}{dx}$ , อนุพันธ์อันดับ 1 | – อัตราการเปลี่ยนแปลงความชัน<br>– $y''$ , $\frac{d^2y}{dx^2}$ , อนุพันธ์อันดับ 2 |

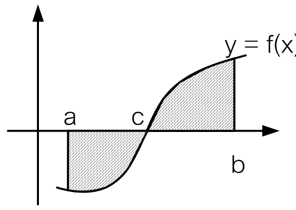
- **พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง** $y = f(x)$




$A = \int_a^b f(x)\,dx$




$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$




$A \neq \int_a^b f(x)\,dx$ แต่ $A = \left| \int_a^c f(x)\,dx \right| + \int_c^b f(x)\,dx$

## บทที่ 13. ความน่าจะเป็น Created by P'1 NISIT TUTOR <Tel. 085 – 999 – 9449>

- **กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ** ( กฎการนับ )

1. งานคืออะไร ( พยายามสมมติตัวเองให้อยู่ในเหตุการณ์นั้น )
2. งานนั้นแบ่งเป็นกี่ขั้นตอน ( ดูว่า move กี่ครั้ง )
3. แต่ละขั้นตอนทำได้กี่วิธี โดยที่

3.1 แยกขั้นตอนใช้กฎการคูณ 3.2 แยกกรณีใช้กฎการบวก

( ถ้างานมีหลายขั้นตอนให้ทำขั้นตอนที่มีปัญหามากสุดก่อนเสมอ )

- **แฟคทอเรียล** ( Factorial , n! ) , $n \in I^+ , I^0$

$\boxed{n! = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}$ ; $0! = 1! = 1$

- **การเรียงสับเปลี่ยน** , ${}^nP_r$

$\boxed{{}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}}$

${}^5P_3 = 5 \times 4 \times 3$ ( เริ่มที่ 5 ถอย 3 ครั้ง )

${}^6P_2 = 6 \times 5$ ( เริ่มที่ 6 ถอย 2 ครั้ง )

→ ${}^nP_r$ คือ จำนวนวิธีในการเลือกของ n สิ่งมาจัดเรียงกันคราวละ r สิ่ง โดยเราสามารถใช้กฎการนับแทน ${}^nP_r$ ได้

→ ถ้ามีของ n สิ่งนำมาเรียง ( เส้นตรง ) ทั้ง n สิ่งทำได้ n! วิธี

- **การเรียงของติดกัน , ของแยกกัน , ของซ้ำ**

→ ของติดกัน " อยากให้อะไรติดกันเอามามัด "

→ ของแยกกัน " อยากให้อะไรไม่ติดกันเอามันไปแทรก "

→ ของซ้ำ = ( ต่าง! )/( ซ้ำ! )

เช่น AAABBC เรียงได้ทั้งหมด ( 6! ) / ( 3!2! ) วิธี

- **การเรียงของเป็นวงกลม**

" fix ไว้ 1 จุด แล้วที่เหลือคิดเหมือนเรื่องเส้นตรง "

→ ถ้ามีของ n สิ่งนำมาเรียง ( วงกลม ) ทั้ง n สิ่งทำได้ (n–1)! วิธี

→ ถ้าเป็นวงกลม 3 มิติจำนวนวิธี = ครึ่งหนึ่งของวงกลมปกติ

- **การจัดหมู่** , ${}^nC_r$

$\boxed{{}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$

${}^{10}C_8 = {}^{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1}$

${}^8C_5 = {}^8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$

→ ${}^nC_r$ คือ จำนวนวิธีในการเลือกของ n สิ่งมาจัดกลุ่มกันคราวละ r สิ่ง

→ โจทย์การจัดหมู่**<u>ลำดับต้องไม่สำคัญ</u>** ( ลำดับสำคัญใช้กฎการนับ )

– มีของ 5 สิ่งนำมาเรียง 3 สิ่งทำได้ $5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี

– มีของ 5 สิ่งนำมาจัดกลุ่ม 3 สิ่งทำได้ ${}^5C_3 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ วิธี

- **การหาจำนวนฟังก์ชัน**

นิยาม ฟังก์ชันจาก A ไป B ( $f : A \rightarrow B$ )

$D_f = A$ , $R_f \subset B$ ( โดเมนต้องใช้หมด , เรนจ์ใช้ไม่หมด )

ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ( $f : A \xrightarrow{\text{onto}} B$ )

$D_f = A$ , $R_f = B$ ( โดเมนต้องใช้หมด , เรนจ์ก็ต้องใช้หมด )

ขั้นตอนการหาจำนวนฟังก์ชันมีดังนี้

1. กรอกโดเมนให้ครบ ( โดเมนต้องใช้หมด , $D_f = A$ )
2. เลือกเรนจ์ตามเงื่อนไข

- **การแบ่งกลุ่มสิ่งของ** ( เช่น โจทย์การจัดคนเข้าห้อง )

1. ทุกกลุ่มมีจำนวนสิ่งของไม่เท่ากัน = ต่าง ! / ซ้ำ !
2. บางกลุ่มมีจำนวนสิ่งของเท่ากัน = ต่าง ! / ( ซ้ำ! )( ซ้ำกลุ่ม! )

5 → 3, 2 = 5! / 3!2!  6 → 3, 3 = 6!/ 3!3!(2!)

ซ้ำกลุ่ม !

**ทฤษฎีบททวินาม**

$$\boxed{(a+b)^n = {}^nC_0a^nb^0 + {}^nC_1a^{n-1}b^1 + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + ..+{}^nC_na^0b^n}$$

จากการกระจาย $(a+b)^n$ จะได้ข้อสังเกตดังนี้

1. กระจายได้ n+1 พจน์
2. ดีกรีตัวหน้า ( a ) จะลดลงทีละ 1 จาก $a^n$ จนถึง $a^0$
3. ดีกรีตัวหลัง ( b ) จะเพิ่มขึ้นทีละ 1 จาก $b^0$ จนถึง $b^n$
4. เราสามารถหาพจน์ที่ r+1 จากสูตร $\boxed{T_{r+1} = {}^nC_r \cdot a^{n-r} \cdot b^r}$

- **ความน่าจะเป็น** ( Probability , P(E) )

$$\boxed{P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\text{สนใจ}}{\text{ทั้งหมด}}}$$

*" ในการหาค่า P(E) ให้เริ่มจากการหา n(S) ก่อนเสมอ แล้วจึงหา n(E) "*

n(E) = จำนวนเหตุการณ์ที่เราสนใจ ( $E \subset S$ )

n(S) = จำนวนเหตุการณ์ที่สามารถเกิดได้ทั้งหมด ( เกิดแบบไม่มีเงื่อนไข )

→ สมบัติที่ควรทราบ

(1) $P(E) = 1 - P(E')$ (2) $0 \le P(E) \le 1$ , $0\% \le P(E) \le 100\%$

→ ความน่าจะเป็น 2 เหตุการณ์ มี 2 แบบ

(1) 2 เหตุการณ์เกี่ยวข้องกัน → ใช้แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์

→ ใช้ $P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

(2) 2 เหตุการณ์อิสระกัน → ใช้ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

( มักจะเกิดต่อเนื่องกัน )

# บทที่ 14. สถิติ Created by P'1 NISIT TUTOR <Tel. 085 – 999 – 9449>

- **ตารางแจกแจงความถี่**

| คะแนน | จำนวน | ขอบล่าง | ขอบบน | จุดกึ่งกลาง | ความถี่สะสม | ความถี่สัมพัทธ์ | ความถี่สะสมสัมพัทธ์ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 – 9 | 4 | 4.5 | 9.5 | 7 | 4 | 4/20 | 4/20 |
| 10 – 14 | 8 | 9.5 | 14.5 | 12 | 12 | 8/20 | 12/20 |
| 15 – 19 | 5 | 14.5 | 19.5 | 17 | 17 | 5/20 | 17/20 |
| 20 – 24 | 3 | 19.5 | 24.5 | 22 | 20 | 3/20 | 20/20 |

→ สูตรนี้ใช้เฉพาะข้อมูลเป็นจำนวนเต็ม และทุกชั้นกว้างเท่ากัน

– ขอบล่าง = min – 0.5

– ขอบบน = max + 0.5

– จุดกึ่งกลาง = ( max+min ) / 2

– ความถี่สะสม = ผลรวมความถี่ในชั้นนั้นกับชั้นที่คะแนนต่ำกว่า

– ความถี่สัมพัทธ์ = ความถี่ในชั้นนั้น / ความถี่ทั้งหมด

– ความถี่สะสมสัมพัทธ์ = ความถี่สะสมในชั้นนั้น / ความถี่ทั้งหมด

– ความกว้างอันตรภาคชั้น = max – min + 1

- **ค่ากลางของข้อมูล ( มี 6 ตัว แต่เคยออกสอบแค่ 3 ตัว )**

(1) **ค่าเฉลี่ยเลขคณิต** ( $\mu$ , $\bar{x}$ )

1.1 ข้อมูลดิบ $\mu_{\text{ดิบ}} = \bar{x}_{\text{ดิบ}} = \dfrac{\sum x_i}{N}$

1.2 ข้อมูลในตาราง $\mu_{\text{ตาราง}} = \bar{x}_{\text{ตาราง}} = \dfrac{\sum f_i x_i}{N}$

เมื่อ $f_i$ คือ ความถี่ในแต่ละชั้น , $x_i$ คือ จุดกึ่งกลางในแต่ละชั้น

1.3 ลดทอนข้อมูล $\mu_{\text{ลดทอน}} = \bar{x}_{\text{ลดทอน}} = a + \bar{d}I = a + \left(\dfrac{\sum f_i d_i}{N}\right)I$

โดยที่ a คือ จุดกึ่งกลางอันตรภาคชั้นที่ d = 0

$d_i$ คือ จุดกึ่งกลางสมมติ , I คือ ความกว้างอันครภาคชั้น

1.4 ข้อมูลถ่วงน้ำหนัก $\mu_{\text{ถ่วง}} = \bar{x}_{\text{ถ่วง}} = \dfrac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$

เมื่อ $w_i$ คือ ความสำคัญในคะแนนแต่ละตัว , $x_i$ คือ คะแนนแต่ละตัว

1.5 ข้อมูล $\ge$ 2 กลุ่ม $\mu_{\text{รวม}} = \bar{x}_{\text{รวม}} = \dfrac{N_1\bar{x} + N_2\bar{x} + ...}{N_1 + N_2 + ...}$

(2) **มัธยฐาน** ( Median,Me )

2.1 ข้อมูลดิบ มีขั้นตอนดังนี้ 1. เรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก

2. ตำแหน่งของ Me = $\dfrac{N+1}{2}$ เมื่อ N คือจำนวนข้อมูลทั้งหมด

3. ถ้าตำแหน่งไม่ลงตัวให้นำค่าข้อมูลบวกกันหาร 2

2.2 ข้อมูลในตาราง มีขั้นตอนดังนี้

1. หาตำแหน่งของ Me จาก สูตร $\dfrac{N}{2}$ ( ต้องทำขั้นนี้ก่อนเสมอ )

2. หาว่าตำแหน่งนั้นอยู่ชั้นไหนโดยดูจากความถี่สะสม ( ดูช่อง F )

3. ใช้สูตร $Me = L + \left(\dfrac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_m}\right)I$

โดย L = ขอบล่างชั้นที่ Me อยู่

$\sum f_L$ = ผลรวมความถี่ชั้นที่คะแนนต่ำกว่า

I = ความกว้างของอันตรภาคชั้น

$f_m$ = ความถี่ในชั้นที่ Me อยู่

(3) **ฐานนิยม** ( Mode,Mo ) คือ ค่าของข้อมูลที่มีความถี่มากที่สุด ( **<u>หมายเหตุ</u>** ฐานนิยมอาจจะมี 1 ค่า , หลายค่า , หรือไม่มีเลยก็ได้ )

3.1 ข้อมูลดิบ Mo = ข้อมูลที่มีความถี่สูงสุด 3.2 ข้อมูลในตาราง Mo = จุดกึ่งกลางชั้นที่มีความถี่สูงสุด

- **สมบัติของ $\mu$ , $\bar{x}$ , Me ที่ควรรู้**

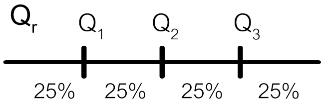
1. $\sum(x_i-\mu)$ , $\sum(x_i-\bar{x}) = 0$
2. ถ้า $\sum(x_i-M)^2$ มีค่าน้อยที่สุดจะได้ว่า $M = \mu , \bar{x}$
3. ถ้า $\sum|x_i-M|$ มีค่าน้อยที่สุดจะได้ว่า $M = Me$

- **การวัดตำแหน่งของข้อมูล**

→ ความหมายของควอไทล์($Q_r$) , เดไซล์ ($D_r$) , เปอร์เซ็นต์ไทล์ ($P_r$)

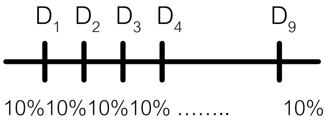
" JUM ตัวเลขที่ห้อย ( r ) คือ ตัวเลขแห่งความพ่ายแพ้ "

$Q_r$



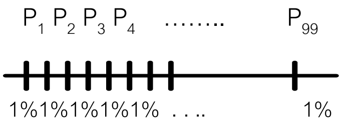

ถ้า P'1 สอบได้คะแนนตรงกับ $Q_3$ หมายความว่า ถ้ามีคนสอบพร้อม P'1 x คน จะ**<u>แพ้</u>** P'1 $\approx \frac{3}{4}x$ คน

$D_r$




ถ้า P'โดม สอบได้คะแนนตรงกับ $D_4$ หมายความว่า ถ้ามีคนสอบพร้อม P'โดม x คน จะ**<u>แพ้</u>** P'โดม$\approx \frac{4}{10}x$ คน

$P_r$




ถ้า P'เคน สอบได้คะแนนตรงกับ $P_{15}$ หมายความว่า ถ้ามีคนสอบพร้อม Pเคน x คน จะ**<u>แพ้</u>** P'เคน $\approx \frac{15}{100}x$ คน

- **การหาค่า $Q_r$ , $D_r$ , $P_r$**

→ ข้อมูลดิบ มีขั้นตอนดังนี้

(1) เรียงข้อมูลน้อย → มากแล้วหาตำแหน่ง $Q_r$ , $D_r$ , $P_r$ จากสูตร

ตำแหน่งของ $Q_r = \frac{(N+1)\cdot r}{4}$

ตำแหน่งของ $D_r = \frac{(N+1)\cdot r}{10}$

ตำแหน่งของ $P_r = \frac{(N+1)\cdot r}{100}$

(2) ถ้าตำแหน่งลงตัวให้ตอบค่าข้อมูลที่ตำแหน่งนั้น

(3) ถ้าตำแหน่งไม่ลงตัวให้ใช้สูตร " ทศนิยม × ผลต่าง " แล้วจึงนำค่าที่ได้บวกกับตำแหน่งตั้งต้น

→ ข้อมูลในตาราง มีขั้นตอนดังนี้

$$Q_r = L + \left(\frac{\frac{Nr}{4}-\sum f_L}{f_{Q_r}}\right)I$$

$$D_r = L + \left(\frac{\frac{Nr}{10}-\sum f_L}{f_{D_r}}\right)I$$

$$P_r = L + \left(\frac{\frac{Nr}{100}-\sum f_L}{f_{P_r}}\right)I$$

(1) หาตำแหน่ง $Q_r$ , $D_r$ , $P_r$ จากสูตร $\frac{Nr}{4}$ , $\frac{Nr}{10}$ , $\frac{Nr}{100}$ ( ดูช่องความถี่สะสม F )

(2) หาค่าของ $Q_r$ , $D_r$ , $P_r$ จากสูตรด้านซ้าย

L = ขอบล่างของชั้นที่ $Q_r$ , $D_r$ , $P_r$ อยู่

r = ลำดับของ $Q_r$ , $D_r$ , $P_r$

$f_{Q_r}$ , $f_{D_r}$ , $f_{P_r}$ = ความถี่ในชั้นที่ $Q_r$ , $D_r$ , $P_r$ อยู่

N = จำนวนข้อมูลทั้งหมด

$\sum f_L$ = ผลรวมความถี่ชั้นที่คะแนนต่ำกว่า

I = ความกว้างของอันตรภาคชั้น

- **การวัดการกระจายข้อมูล** แบ่งเป็น 2 ชนิด คือ

(1) การวัดการกระจายสมบูรณ์ ( ห้ามใช้ในการเปรียบเทียบ )

**– พิสัย** ( Range )

ข้อมูลดิบ = $x_{max} - x_{min}$

ข้อมูลในตาราง = ขอบบนmax – ขอบล่างmin

**– ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ หรือ กึ่งช่วงควอร์ไทล์** ( Q.D. )

ข้อมูลดิบ ,ข้อมูลในตาราง = $\frac{Q_3-Q_1}{2}$

**–ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย** ( M.D.)

ข้อมูลดิบ = $\frac{\sum|x_i-\bar{x}|}{N} = \frac{\sum|x_i-\mu|}{N}$

เมื่อ $x_i$ คือ ข้อมูลตัวที่ i ( ข้อมูลแต่ละตัว )

ข้อมูลในตาราง $= \frac{\sum f_i|x_i-\bar{x}|}{N} = \frac{\sum f_i|x_i-\mu|}{N}$

เมื่อ $x_i$ คือ จุดกึ่งกลางในแต่ละชั้น , $f_i$ คือ ความถี่ในแต่ละชั้น.

**– ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน** ( S.D. , S , $\sigma$ ) **( ดีที่สุด )**

ข้อมูลดิบ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}-\mu^2}$

$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2}{N-1}}$

เมื่อ $x_i$ คือ ข้อมูลตัวที่ i ( ข้อมูลแต่ละตัว )

ข้อมูลในตาราง $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum f x_i^2}{N}-\mu^2}$

$S = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2 - N\bar{x}^2}{N-1}}$

เมื่อ $x_i$ คือ จุดกึ่งกลางในแต่ละชั้น , $f_i$ คือ ความถี่ในแต่ละชั้น.

- **ความแปรปรวน** ( Variance )

**ความแปรปรวนขอบประชากร** ( $\sigma^2$ )

ข้อมูลดิบ $\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{N} = \frac{\sum x_i^2}{N}-\mu^2$

ข้อมูลในตาราง $\frac{\sum f_i(x_i-\mu)^2}{N} = \frac{\sum f x_i^2}{N}-\mu^2$

**ความแปรปรวนของตัวอย่าง** ( $S^2$ )

ข้อมูลดิบ $\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{N-1} = \frac{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2}{N-1}$

ข้อมูลในตาราง $\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{N-1} = \frac{\sum f_i x_i^2 - N\bar{x}^2}{N-1}$

**<u>หมายเหตุ</u>** ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างยังไม่เคยออก Ent แต่ระวังบ้างก็ดี

**Tip** ถ้าตำแหน่ง Me , $Q_r$ , $D_r$ , $P_r$ ( $\frac{N}{2}, \frac{Nr}{4}, \frac{Nr}{10}, \frac{Nr}{100}$ ) ตรงกับคนสุดท้ายชั้นไหนให้ตอบขอบบนชั้นนั้น

JUM " **ขอบบน – คนสุดท้าย** "

- **ความแปรปรวนรวม**

(1) ถ้า $\mu_1 = \mu_2$ , $\sigma^2_{รวม} = \dfrac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2 + ....}{N_1 + N_2 + ....}$

(2) ถ้า $\mu_1 \neq \mu_2$ , $\sigma^2_{รวม}$ = สูตรยาวมากจึงควรใช้วิธี $\sum x^2_{รวม} = \sum x_1^2 + \sum x_2^2$ แล้วจึงไปหา $\sigma^2_{รวม}$

- **ความหวั่นไหวของ $\mu(\bar{x})$** , Me , Mo , Range , Q.D. , M.D. , $\sigma$( S.D.) , $\sigma^2(S^2)$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1 , x_2 , .., x_N$ | A | B | C | D | E | F | G | $G^2$ |
| $x_1 \pm k , x_2 \pm k , ..., x_N \pm k$ | $A \pm k$ | $B \pm k$ | $C \pm k$ | D | E | F | G | $G^2$ |
| $k \cdot x_1 , k \cdot x_2 , ..., k \cdot x_N$ | $k \cdot A$ | $k \cdot B$ | $k \cdot C$ | $\lvert k \rvert \cdot D$ | $\lvert k \rvert \cdot E$ | $\lvert k \rvert \cdot F$ | $\lvert k \rvert \cdot G$ | $k^2 \cdot G^2$ |

" 3 ตัวแรก +,–,×,÷ คิดหมด , 4 ตัวหลัง +,– ไม่คิด คิดแต่ ×,÷ และ ต้องเป็นบวกเสมอ "

**(2) การวัดการกระจายสัมพัทธ์ (ไว้ใช้เปรียบเทียบ)**

( JUM! ทั้งสมบูรณ์และสัมพัทธ์มีตัววัด 4 ตัวเหมือนกัน )

**–สัมประสิทธิ์ของพิสัย**

ข้อมูลดิบ = $\dfrac{x_{max} - x_{min}}{x_{max} + x_{min}}$

ข้อมูลในตาราง = $\dfrac{ขอบบน_{max} - ขอบล่าง_{min}}{ขอบบน_{max} + ขอบล่าง_{min}}$

**–สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์**

ข้อมูลดิบ , ข้อมูลในตาราง = $\dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

**–สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย**

ข้อมูลดิบ , ข้อมูลในตาราง = $\dfrac{M.D.}{\mu}$ , $\dfrac{M.D.}{\bar{x}}$

**–สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน** ( C.V. )

ข้อมูลดิบ , ข้อมูลในตาราง = $\dfrac{\sigma}{\mu}$ , $\dfrac{S.D.}{\bar{x}}$

ตัวอย่างเช่น

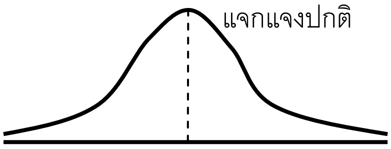
ข้อมูลชุดที่ 1. $\sigma$ ( S.D.) = 3 , $\mu(\bar{x})$ = 2

ข้อมูลชุดที่ 2. $\sigma$ ( S.D.) = 2 , $\mu(\bar{x})$ = 1

ข้อมูลชุดที่ 2 กระจาย > ข้อมูลชุดที่ 1.

เพราะ $CV_2 > CV_1$ ( $\sigma$ หรือ S.D. > ไม่ได้หมายความว่ากระจายมากกว่า )

- **การแจกแจงความถี่ของข้อมูล**

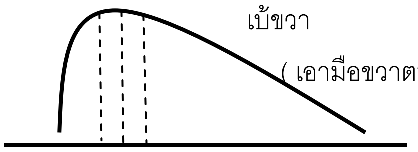

แจกแจงปกติ

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

มัธยฐาน

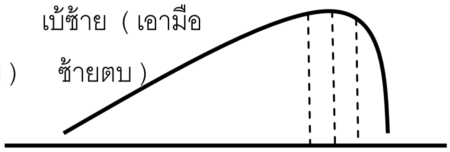
ฐานนิยม

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = มัธยฐาน = ฐานนิยม


เบ้ขวา ( เอามือขวาตบ )

ฐานนิยม < มัธยฐาน < ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ข้อมูลส่วนใหญ่มีค่า<u>**น้อย**</u> เช่น คะแนนสอบของนักเรียน เมื่อข้อสอบยาก


เบ้ซ้าย ( เอามือซ้ายตบ )

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต < มัธยฐาน < ฐานนิยม

ข้อมูลส่วนใหญ่มีค่า<u>**มาก**</u> เช่น คะแนนสอบของนักเรียน เมื่อข้อสอบง่าย

- **ค่ามาตรฐาน ( คะแนนมาตรฐาน,z )** คือ ค่าที่ไว้ใช้เปรียบเทียบคะแนนดิบจากข้อมูล ≥ 2 กลุ่มขึ้นไปว่าคะแนนดิบตัวใดมีค่ามากกว่า

$\boxed{Z_i = \dfrac{x_i - \mu}{\sigma}}$ หรือ $\boxed{Z_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{s}}$

โดยที่ (1) $\sum Z = 0$ → " ผลรวมค่า Z ของข้อมูลทุกตัวมีค่าเท่ากับ 0 เสมอ "

(2) $\sum Z^2 = N$ → " ผลรวมกำลังสองของค่า Z มีค่าเท่ากับจำนวนข้อมูลเสมอ "

(3) $\sigma_Z$ ( $SD_Z$ ) = 1 → " ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่า Z มีค่าเท่ากับ 1 เสมอ "

- **พื้นที่ใต้โค้งปกติ** ( เน้นสุดๆ ออกสอบทุกปี )

คะแนนดิบ ( $x_i$ ) ⇄ ค่ามาตรฐาน ( Z ) ⇄ พื้นที่ใต้โค้งปกติ ( A ) ⇄ เปอร์เซ็นต์ไทล์ ( $P_r$ )

สิ่งที่ควรรู้เกี่ยวกับ $x_i$

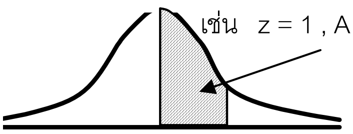
1. $\sum(x_i - \mu) , \sum(x_i - \bar{x}) = 0$
2. ถ้า $\sum(x_i - M)^2$ มีค่า Min จะได้ว่า M = $\mu , \bar{x}$
3. ถ้า $\sum|x_i - M|$ มีค่า Min จะได้ว่า M = Me

สิ่งที่ควรรู้เกี่ยวกับ Z

1. $Z_i = \dfrac{x_i - \mu}{\sigma}$ , $Z_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{s}$
2. $\sum Z = 0$
3. $\sum Z^2 = N$
4. $\sigma_Z = 1$ ( $SD_Z = 1$ )

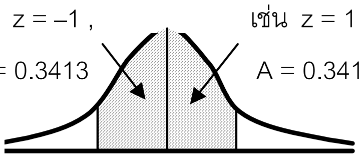
สิ่งที่ควรรู้เกี่ยวกับ A

1. พื้นที่ใต้โค้งคือค่าความน่าจะเป็น
2. พื้นที่จากตารางวัดจากแกนกลางเสมอ


เช่น z = 1 , A = 0.3413

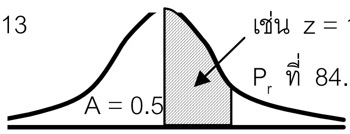
3. พื้นที่ 2 ฝั่ง สมมาตรกัน

เช่น z = –1 , A = 0.3413 เช่น z = 1 , A = 0.3413



สิ่งที่ควรรู้เกี่ยวกับ $P_r$

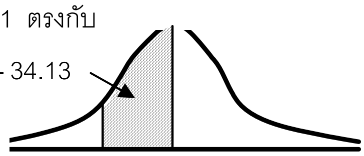
1. r คือ ตัวเลขแห่งความพ่ายแพ้
2. ถ้า Z > 0 แล้ว $P_r$ จะ > 50



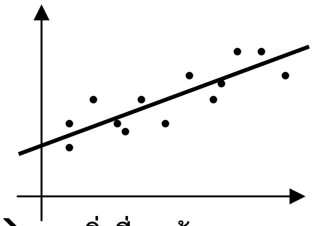
เช่น z = 1 ตรงกับ $P_r$ ที่ 84.13

3. ถ้า Z < 0 แล้ว $P_r$ จะ < 50

เช่น z = –1 ตรงกับ $P_r$ ที่ 50 – 34.13 = 15.87



- **ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล** คือ **<u>การพยากรณ์</u>**ค่าตัวแปรตาม เมื่อทราบค่าตัวแปรต้น ( ตัวแปรอิสระ )



**แบบที่ 1. สัมพันธ์กันเป็นรูปเส้นตรง**

รูปสมการทั่วไป : $Y = mX + c$

สมการปกติ : $\sum_{i=1}^{n} y_i = m\sum_{i=1}^{n} x_i + cN$ ----- $\boxed{\text{“ JUM Take } \Sigma \text{ ”}}$

$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i$ ----- $\boxed{\text{“ JUM Take } \Sigma x \text{ ”}}$

→ **สิ่งที่ควรรู้**

(1) ตัวแปรต้นนิยมแทนด้วย x ตัวแปรตามนิยมแทนด้วย y ( แต่ในบางครั้งจะขึ้นอยู่กับโจทย์ ) และต้องเอาตัวแปรต้นทำนายตัวแปรตาม ห้ามเอาตัวแปรตามมาทำนายตัวแปรต้นย้อนกลับ

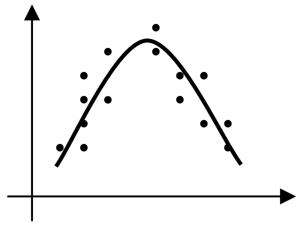
(2) สมการเส้นตรงที่ได้จะ**<u>ผ่าน</u>**จุด ( $\bar{x}$ , $\bar{y}$ ) เสมอ

(3) การหาค่า m , c สามารถทำได้ 2 วิธี

3.1 ใช้การแก้สมการปกติ 2 สมการ 2 ตัวแปร

3.2 ใช้สูตร $m = \dfrac{\sum xy - n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$ , $c = \bar{y} - m\bar{x}$

**แบบที่ 2. สัมพันธ์กันเป็นรูปพาราโบลา ( ยังไม่เคยออก ent ไม่เน้น )** รูปสมการทั่วไป : $Y = aX^2 + bX + c$



สมการปกติ : $\sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cN$ ----“ JUM Take$\Sigma$ ”

$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i$ ----“ JUM Take$\Sigma x$ ”

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ ----“ JUM Take$\Sigma x^2$ ”

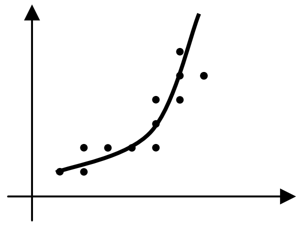
→ **สิ่งที่ควรรู้**

(1) ปกติสมการพาราโบลาที่ได้จะ**<u>ไม่ผ่าน</u>**จุด ( $\bar{x}$ , $\bar{y}$ )

(2) การหาค่า a , b และ c สามารถทำได้ 2 วิธี กล่าวคือ

2.1 ใช้การแก้สมการปกติ 3 สมการ 3 ตัวแปร ( พยายามจัดรูปตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง ให้อยู่ในรูปอีกสองตัวแปร เช่น $a = k_1b + k_2c$ แล้วแทนย้อนกลับไปใน 2 สมการที่เหลือ เพื่อจะได้ 2 สมการ 2 ตัวแปร แล้วค่อยเริ่มแก้ ) และ ถ้าโจทย์ปราณี!! จะจงใจให้ $\sum x = 0$ ( จะส่งผลให้ $\sum x^3 = 0$ ตามไปด้วย )

2.2 ใช้เมตริกซ์เข้าช่วย ( Row – Operation )



**แบบที่ 3. สันพันธ์กันเป็นรูปเอกซ์โพเนนเชียล ( ยังไม่เคยออก ent ไม่เน้น )**

รูปสมการทั่วไป : $Y = ab^X$

หรือ Take log แล้วจัดรูป $\log y = \log a + x\log b$

สมการปกติ : $\sum_{i=1}^{n} \log y_i = N\log a + (\log b)\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i$ ----“ JUM Take$\Sigma$ ”

$\sum_{i=1}^{n} x_i \log y_i = (\log a)\sum_{i=1}^{n} x_i + (\log b)\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ ----“ JUM Take$\Sigma x$ ”

→ **สิ่งที่ควรรู้**

(1) การหาค่า loga , logb สามารถทำได้ 2 วิธีกล่าวคือ

1.1 ใช้การแก้สมการปกติ 2 สมการ 2 ตัวแปร

1.2 ใช้สูตรลัด $\log b = \dfrac{\sum x\log y - n\bar{x}\cdot\overline{\log y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$ , $\log a = \overline{\log y} - \bar{x}\log b$

หมายเหตุ สูตรลัดจะใช้ได้เฉพาะเมื่อรูปสมการทั่วไป เป็น $Y = ab^X$ ถ้าเป็นแบบอื่นต้องใช้วิธี take$\Sigma$

- **ข้อมูลที่อยู่ในรูปอนุกรมเวลา** คือ การพยากรณ์ค่าตัวแปรตาม เมื่อตัวแปรต้นเป็นข้อมูลเชิงคุณภาพ ( เช่น ปี , เดือน ) โดยเราจำเป็นต้องสมมติตัวเลขขึ้นมาแทนค่าตัวแปรต้นเหล่านั้น ดังนี้ แล้วจึงแก้สมการหาค่าคงที่ตามต้องการ ( เหมือนข้อมูลปกติ )

← ปีที่เก่ากว่า ตรงกลาง ปีที่ใหม่กว่า →

(1) ถ้าโจทย์ให้จำนวนตัวแปรต้นมาเป็น**<u>จำนวนคี่</u>** ..... , –3 , –2 , –1 , $\boxed{0}$ , 1 , 2 , 3 , …… “ เว้นช่องไฟทีละ 1 ”

(2) ถ้าโจทย์ให้จำนวนตัวแปรต้นมาเป็น**<u>จำนวนคู่</u>** ..... , –5 , –3 , –1 , $\boxed{1}$ , 3 , 5 , …… “ เว้นช่องไฟทีละ 2 “

- **เทคนิคการวาดกราฟอสมการเส้นตรง**

(1) วาดเส้นตรงตามปกติ ( หาจตก. x , จตก. y , ลากเชื่อม ) (2) จัด y อยู่ซ้ายมือของอสมการ ( หน้า y ต้องเป็นบวก )

(3) ถ้าเป็นเครื่องหมาย $<$ , $\leq$ ให้แรเงาลง (4) ถ้าเป็นเครื่องหมาย $>$ , $\geq$ ให้แรเงาขึ้น ( 5 ) $<$ , $>$ เส้นประ $\leq$ , $\geq$ เส้นทึบ

- **ขั้นตอนการทำโจทย์ปัญหา**

(1) กำหนดให้ได้เสียก่อนว่าจะให้ x , y แทนอะไร (2) สร้างฟังก์ชันวัตถุประสงค์โดยดูจากสิ่งที่โจทย์ถาม

(3) สร้างอสมการเงื่อนไข (4) วาดกราฟอสมการเงื่อนไข (5) หาอาณาบริเวณที่เป็นไปได้ ( ส่วนที่อินเตอร์เซก ( $\cap$ ) กัน )

(6) นำจุดมุมทั้งหมดของอาณาบริเวณที่เป็นไปได้แทนลงฟังก์ชันวัตถุประสงค์เพื่อหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดตามที่โจทย์ถาม

**<u>หมายเหตุ</u>** ข้อสอบ PAT มักจะให้ขั้น (1) , (2) , (3) มาก่อนทำให้เราเริ่มวาดกราฟอสมการเงื่อนไขได้เลย